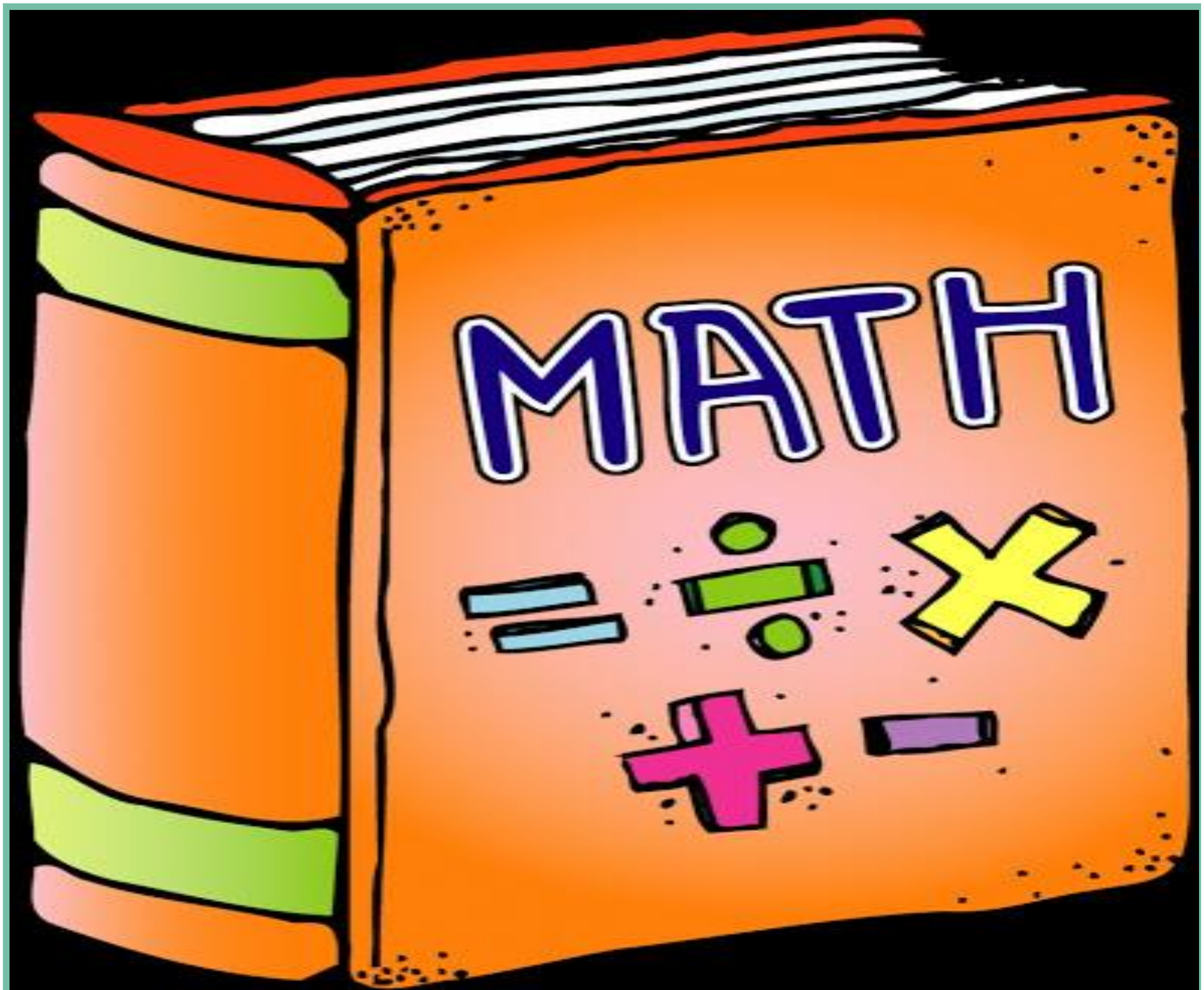


LECCIONES DIDÁCTICAS DE MATEMÁTICAS

Fundamentos para preparación al cálculo

CONTENIDO

LISTA DE COLABORADORES

Dra. Mildred Rodríguez Pomales
Facilitadora docente de Matemáticas
Jubilada

Dra. Rosa M. López Matta
Maestra de Matemáticas
Escuela Elvira Colón
Región Educativa de Ponce

Prof. Víctor Criado Criado
Maestro de Matemáticas
Escuela Lysander Borrero Terry
Región Educativa de Ponce

Profa. Johanalitz León Gaud
Maestra de Matemáticas
Escuela Dr. Máximo Donoso Sánchez

Profa. María Pacheco
Maestra de Matemáticas
Escuela Dr. Máximo Donoso Sánchez

Profa. Esperanza Soto Rivera
Maestra de Matemáticas
Escuela Dr. Pedro Albizu Campos

Profa. Medalia Román González
Maestra de Matemáticas
Escuela Dr. Pedro Albizu Campos

Dra. Wanda I. Rivera Rivas
Gerente de Operaciones
Programa de Matemáticas

Fórmulas para utilizarse en este módulo

Leyes de Exponentes

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}; si\ m > n$$

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}; si\ n > m$$

$$a^0 = 1$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\frac{1}{a^{-n}} = a^n$$

Rúbrica Sugerida

PUNTUACIÓN	CRITERIOS
Respuesta de **5** puntos	La respuesta muestra un entendimiento completo de los conceptos y **los procedimientos matemáticos** para resolver el problema. El estudiante realiza procedimientos completos y da respuestas correctas a todas las partes del problema. La respuesta contiene una explicación clara y efectiva que detalla cómo se resolvió el problema (en los ejercicios de pregunta abierta). La respuesta puede omitir detalles que no indican que el problema no fue comprendido claramente.
Respuesta de **3** puntos	La respuesta es parcialmente correcta. La solución del problema podría ser correcta, pero demuestra un entendimiento incompleto o incorrecto de los conceptos y procedimientos matemáticos esenciales para resolver el problema. O bien, los cómputos podrían ser incorrectos, pero los procedimientos y/o la explicación muestran un entendimiento correcto del procedimiento para encontrar la solución, aunque se hayan cometido algunos errores de cálculo.
Respuesta de **0** punto	La respuesta es completamente incorrecta y no es posible interpretarla con claridad o muestra que la comprensión del estudiante de los procedimientos y conceptos necesarios para resolver el problema es insuficiente. Aunque puede haber evidencia de que algunos conceptos y operaciones son correctos, no son parte de la solución del problema o de la pregunta en general.

Nota: El maestro preparará la rúbrica correspondiente a la actividad provista.

LECCIONES

En este módulo tendremos la oportunidad de estudiar, aprender y practicar lecciones del curso de Fundamentos de preparación al cálculo. A continuación, presentamos lo que se espera en este aprendizaje.

Estándares	Expectativas	Indicadores	Objetivos
Numeración y operaciones	1.0 Usa propiedades de números racionales e irracionales.	1. Define cantidades adecuadas con el fin de hacer modelos descriptivos.	Explicará la interacción entre las reglas de adición, multiplicación y la exponenciación. Convertirá expresiones con exponentes fraccionarios a radicales y expresiones con exponentes negativos a exponentes positivos. Utilizará las reglas de los exponentes para resolver ecuaciones simples que contienen exponentes. Interpretará la diferencia entre números reales y números racionales.
Álgebra	16.0 Resuelve ecuaciones e inecuaciones de una variable. 18.0 Representa y resuelve ecuaciones e inecuaciones gráficamente.	1 Resuelve ecuaciones lineales y darse cuenta de la solución cuando el eje horizontal (eje x) interseca el gráfico de la línea.	Resolver y graficar la solución de una ecuación lineal Interpretar la relación entre la solución de una ecuación lineal y el punto de intersección con el eje x.

	13.0 Usa la identidad de polinomios para resolver problemas.	2. Relaciona desigualdades lineales a situaciones de la vida diaria. 3. Analiza desigualdades lineales y expresar la solución en notaciones de intervalos. 4. Compara la solución de una desigualdad lineal a la línea del gráfico. 5. Desarrolla múltiples estrategias para factorizar polinomios. 6.Diferencia entre raíces polinómicas y los factores de un polinomio y usar esta información para ayudar a factorizar polinomios.	Aplica el concepto desigualdad lineal en situaciones de la vida diaria. Utilizar la notación de intervalo para representar la solución de una desigualdad. Graficar la solución de una desigualdad lineal. Aplicar los métodos de factorización de polinomios Reconocer la diferencia entre raíz polinómica y factores de un polinomio. Utilizar la relación que existe entre raíz polinómica y factores de un polinomio. Realizar operaciones con expresiones racionales (multiplicar, dividir, sumar y restar).

		7. Establece cómo se suma, resta, multiplica y divide expresiones racionales y cómo se cancelan factores comunes en el numerador y denominador.	
Numeración y operación	7.0 Realiza operaciones básicas con logaritmos naturales y comunes.	**ES.N.7.1** Realiza operaciones básicas con logaritmos naturales y comunes. **ES.N.7.2** Aplica las propiedades de los logaritmos [$\log xy = \log x + \log y$; $\log (x/y) = \log x - \log y$, $\log(x^a) = a \log (x)$].	
Álgebra	20.0 Resuelve ecuaciones logarítmicas y exponenciales.	**(+) ES.A.20.1** Resuelve ecuaciones exponenciales. **(+) ES.A.20.2** Resuelve ecuaciones logarítmicas y presta atención a las raíces espurias (raíces extrañas) e interpreta la solución en el contexto de la situación.	
Funciones	21.0 Entiende el concepto de función y usa notación de funciones. 22.0 Entiende, interpreta y analiza funciones.	**ES.F.21.1** Describe y contrasta funciones elementales comunes (representadas simbólica y gráficamente), incluye x^n, $1/x$, $\ln x$, $\log_a x$, e^x, a^x y las funciones trigonométricas básicas. **ES.F.22.1** Escribe una función definida por una	

		expresión en formas diferentes, pero equivalentes para explicar diferentes propiedades de la función. • Usa las propiedades de los exponentes para interpretar expresiones de funciones exponenciales (ejemplo: Identificar la tasa porcentual de cambio en funciones tales como $y = (1.02)^{t}$, $y = (0.97)^{t}$, $y = (1.01)^{12t}$, $y = (1.2)^{t/10}$, y clasificarlas como crecimiento o disminución exponencial). **ES.F.22.2** Compara las propiedades de dos funciones, cada una representada de diferente manera: algebraicamente, gráficamente, en una tabla numérica o descrita verbalmente. (Ejemplo: Dada una gráfica para una función cuadrática y una expresión algebraica para otra, decide cuál tiene el valor máximo mayor). • Reconoce y describe la continuidad, las asíntotas, la simetría (funciones pares e impares) y relaciona estos conceptos con la gráfica de la función. **ES.F.22.3** Distingue entre situaciones que pueden ser modeladas con funciones lineales y	

	23.0 Interpreta funciones que resultan en aplicaciones según el contexto. 24.0 Analiza funciones mediante diferentes representaciones.	con funciones exponenciales. Demuestra que las funciones lineales aumentan por diferencias iguales en intervalos iguales y que las funciones exponenciales aumentan por factores iguales en intervalos iguales. **ES.F.22.4** Reconoce situaciones en las que una cantidad cambia con respecto a otra cantidad a una tasa constante por intervalo unitario. Reconoce situaciones en las cuales una cantidad aumenta o disminuye con respecto a otra cantidad a una tasa porcentual constante por intervalo unitario. **ES.F.22.5** Interpreta los parámetros de una función lineal o exponencial en términos de un contexto. **ES.F.23.1** Interpreta las características básicas de las gráficas y las tablas de una función que representa dos cantidades en términos de esas cantidades, y bosqueja gráficas que muestren las características a partir de una descripción verbal de la relación. Entre las características se incluyen: interceptos, intervalos donde la función es creciente, decreciente, positiva o negativa, máximos y mínimos relativos,	

	25.0 Construye una función como modelo de la relación entre dos cantidades. 26.0 Construye nuevas funciones a partir de funciones existentes. 27.0 Construye y compara modelos lineales, cuadráticos y exponenciales, y resuelve problemas.	simetrías, comportamiento en los extremos, y periodicidad. **ES.F.24.1** Compara y contrasta las características de las diferentes familias de las funciones: polinómicas, racionales, radicales, potencia, logarítmicas, trigonométricas y funciones definidas por partes representadas de múltiples formas. **ES.F.24.2** Compone y descompone dos funciones, determina su dominio, su alcance (campo de valores, rango, recorrido, imagen o condominio) y su gráfica. Utiliza la composición de funciones para determinar si las funciones son inversas. **ES.F.24.3** Grafica funciones expresadas simbólicamente y muestra las características claves de la gráfica, en forma manual en casos sencillos y con tecnología en casos más complejos. • (+) Grafica funciones exponenciales y logarítmicas, y señala los interceptos y su comportamiento en los extremos. **(+) ES.F.25.4** Resuelve problemas que involucren logaritmos y	

		exponentes al usar la relación inversa entra ambas funciones. **ES.F.26.1** Identifica el efecto sobre la gráfica al reemplazar $f(x)$ por $f(x) + k$, $k\,f(x)$, $f(kx)$ y $f(x + k)$ para valores específicos de *k* (positivos y negativos); halla el valor de *k* dadas las gráficas. Experimenta con casos e ilustra una explicación de los efectos sobre la gráfica con el uso de la tecnología. **ES.F.26.2** Halla funciones inversas. **(+) ES.F.26.3** Lee valores de una función inversa a partir de una gráfica o de una tabla y sabe que la función tiene un inverso. **ES.F.27.1** Construye funciones lineales y exponenciales, incluye sucesiones aritméticas y geométricas, dada una gráfica, una descripción de la relación, o dos pares de entradas y salidas (incluye leer estas en una tabla) para resolver problemas. **ES.F.27.2** Observa, mediante gráficas y tablas, que una cantidad que aumenta exponencialmente excede a una	

		cantidad que aumenta linealmente, cuadráticamente, o como función polinómica. **ES.F.27.3** En modelos exponenciales, expresa como logaritmo la solución de $ab^{ct} = d$, en el que a, c y d son números reales, y la base b es 2, 10 o e. Evalúa el logaritmo al usar la tecnología.	

Unidad I. Revisión del Álgebra

Lección 1: Álgebra

Operación con números reales

Repasemos las operaciones con números reales. Como recordarás con los números reales podemos realizar las operaciones matemáticas que ya conoces, suma, resta, multiplicación y división. Lo repasaremos utilizando los cuadrados mágicos. En el siguiente cuadrado mágico vas a trabajar con las operaciones de suma y resta. Realiza las operaciones ya sea en forma diagonal, vertical y horizontal que obtenga el mismo resultado.

Veamos este ejemplo:

-4	7	-7	0
-2	-5	-2	5
1	-3	6	-8
1	-3	-1	-1

-4 + 7 = 3 +(-7) = - 4 + 0 = - 4

-2 + (-5) = - 7 + (-2) = - 9 + 5 = - 4

1 + (-3) = - 2 + 6 = 4 + (-8) = -4

1 + (-3) = - 2 + (-1) = -3 + (-1) = -4

Si observas todos los resultados son – 4 , por ello es un cuadrado mágico.

Es tu turno

Realiza las operaciones de suma y resta, ya sea diagonal, vertical u horizontal para hallar el resultado.

-8	1	-1	6
3	2	-4	-3
3	-4	4	-5
0	-1	-1	0

Valor absoluto
El valor absoluto representa la distancia desde el origen o cero de una recta numérica hasta un número o un punto.
Definición:

Si *a* es un número real, su valor absoluto es un número real no negativo definido de la siguiente manera

$$|x| = x \quad si\ x \geq 0$$

$$|x| = -x \quad si\ < 0$$

Ejemplo:
Determina el valor absoluto de:
a. | - 3|
b. | 3 |

Solución:
a. | - 3| = 3
b. |3| = 3

Si observas ambos resultados son iguales, eso significa que:
El valor absoluto de un número real x, es siempre positivo, pero nunca negativo.

Notación exponencial

La notación exponencial se utiliza para determinar las veces en que se repite la base como factor.

exponente

$$_{\text{base}}\, a^b = c$$

resultado

Ejemplos:
a. $3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$, eso quiere decir que la base 3 se repite como factor 3 veces y al multiplicarlos obtenemos el 27.
Existen unas leyes de exponentes que te ayudará a resolver ecuaciones que involucren multiplicación y división. Ellas son las:

Las leyes de exponentes nos permiten evaluar y simplificar expresiones matemáticas.

Descripción	Expresión
Producto de dos factores con bases iguales	$a^m a^n = a^{m+n}$
Producto de dos factores elevado a un exponente	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
El cociente elevado a un exponente	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
Expresión exponencial elevado a su vez un exponente	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
El cociente de dos expresiones exponenciales	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}; si\ m > n$ $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}; si\ n > m$
Cero como exponente donde a ≠ 0	$a^0 = 1$
Exponentes enteros negativos	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$

b. $(-3)^2 + (-2)^2 =$ Notación exponencial, el concepto de base y el de exponente

= (-3 ×-3) + (-2 ×-2)

= 9 X 4

= 36

c. $2^3 \times 2^2 = 2^5$ Producto de dos factores con bases iguales y exponentes enteros

d. $100^0 = 1$ Exponente 0

e. $2^3 \times 2^2 = 2^5 = 32$ Ley para multiplicar factores con la misma base y exponentes enteros.

Otro ejemplo:

f. $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^5$

$= \frac{1\times1\times1\times1\times1}{3\times3\times3\times3\times3} = \frac{1}{243}$

g. $6^{-2} =$ Exponentes negativos y del exponente nulo.

$\frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$

h. $\frac{5^4}{5} = 5^{4-1}\ 5^3 = 125$ El cociente de dos expresiones exponenciales

i. $(x^3)^2$ Potencia entera a otra potencia entera.

$x^{3\cdot2} = x^6$

j. $(3xy^2)^3 = 3^3x^3(y^2)^3 = 27x^3y^6$ Producto elevado a una potencia entera.

k. $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ El cociente elevado a un exponente

$\frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$

Es tu turno

Construyendo con Leyes de Exponentes (valor: 15 puntos)

¡Ya conoces las leyes de los exponentes! Ahora lo vas a demostrar. Tu tarea es construir un solo ejercicio que contenga **todas** las leyes estudiadas. Luego lo simplificarás explicando las leyes que utilizaste paso a paso.

Ejercicio	Solución (Explicación paso a paso)

Finalmente; este ejercicio lo trabajarás y lo enviarás a tu profesor(a) para ser evaluado.

Adición, sustracción y multiplicación de Polinomios

Los polinomios son una parte importante del Álgebra. Están presentes en todos los contextos científicos y tecnológicos: desde las computadoras y la información hasta la carrera espacial. Un **polinomio** es una expresión que se construye por una o más variables, usando solamente las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y exponentes numéricos positivos.

Antes de realizar operaciones con polinomios, hablemos del valor numérico de un polinomio. El **valor numérico** de un polinomio P(x), para un valor x = a, lo expresamos como P(a) y se obtiene sustituyendo la variable x por el valor *a* en el polinomio.

Ejemplo:

$P(x) = 7x^4 - 3x^3 + 4x - 10$ Cuando $x = 2$

$$P(x) = 7x^4 - 3x^3 + 4x - 10$$
$$P(2) = 7(2)^4 - 3(2)^3 + 4(2) - 10$$
$$P(2) = 7 \cdot 16 - 3 \cdot 8 + 8 - 10$$
$$P(2) = 112 - 24 + 8 - 10$$
$$P(2) = 86$$

Ahora procedemos a realizar operaciones con polinomios.

a. Adición:

Para **sumar** polinomios sumamos sus términos semejantes, dejando indicada la suma de los términos no semejantes.

Ejemplo:

$$
\begin{array}{rrrrrr}
P(x) = & 2x^5 - x^4 & & +7x^2 & & +1 \\
+\ Q(x) = & 3x^4 & -2x^3 & -2x^2 & +7x & -8 \\
\hline
\end{array}
$$

$$P(x) + Q(x) = 2x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 7x - 7$$

b. Sustracción:

Para **restar** polinomios sumamos al primero el opuesto del segundo.

Ejemplo:

$$P(x) = 2x^5 - x^4 + 7x^2 + 1$$

$$Q(x) = 3x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 7x - 8$$

El primer polinomio se queda igual, al segundo polinomio se le cambian los signos así:

$$
\begin{array}{lllllll}
P(x) = & 2x^5 & -x^4 & & +7x^2 & & +1 \\
Q(x) = & & -3x^4 & +2x^3 & +2x^2 & -7x & +8 \\
\hline
\end{array}
$$

$$P(x) - Q(x) = 2x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 9x^2 - 7x + 9$$

c. Multiplicación:

El **producto de dos polinomios** se halla multiplicando cada uno de los términos de uno de los polinomios por el otro, y sumando después los polinomios semejantes.

Ejemplo:

$$P(x) = 2x^3 - 5x + 1 \qquad Q(x) = 3x^2 - 4$$

$$
\begin{array}{lr}
 & 2x^3 - 5x + 1 \\
\times & 3x^2 - 4 \\
\hline
\end{array}
$$

Comenzamos a multiplicar utilizando la constante del segundo polinomio

$$\begin{array}{rr} & 2x^3 - 5x + 1 \\ \times & 3x^2 - 4 \\ \hline & -8x^3 \quad\quad + 20x - 4 \\ 6x^5 - 15x^3 + 3x^2 & \\ \hline 6x^5 - 23x^3 + 3x^2 + 20x - 4 & \end{array}$$

Factorización de Polinomios

La **factorización** es un método a través del cual un polinomio se expresa en forma de multiplicación de factores, que pueden ser números, letras o ambos. Para factorizar se agrupan los factores que son comunes a los términos, y de esa forma se va descomponiendo el polinomio en varios polinomios.

Existe métodos de factorización que son aplicados dependiendo de los casos, a continuación, se describen cada uno.

Factorización por factor común: En este método se identifican aquellos factores que son comunes, es decir, aquellos que están repetidos en los términos de la expresión.

Observa el siguiente ejemplo:

Factoriza por factor común $x^3y + x^2y^2 - 2xy$
Si observas la expresión, las variables en común son xy. Ahora tomarás cada término y la divides por el factor común. De esta forma, si la variable tiene exponente, debes aplicar la regla de exponente $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ cuando m > n.

***Solución**:*

$$x^3y + x^2y^2 - 2xy$$

Se determina que las variables que tiene en común son xy. Se dividirá cada término por el factor común, así

$\frac{x^3y}{xy} = x^2$, $\frac{x^2y^2}{xy} = xy$, $\frac{-2xy}{xy} = -2$

$$x^3y + x^2y^2 - 2xy$$
$$= xy(x^2 + xy - 2)$$

Esta es la factorización por factor común.

Otro de los métodos que estaremos trabajando es

Factor común por agrupación: está relacionado con el método de factor común pero trabajamos con factores que se parezcan, es decir, que entre ellos tenga un factor común.

Observa el siguiente ejemplo:

$$ax + bx + ay + by$$

En cada grupo ¿Qué variable tienen en común?

Vamos a resolverlo:

Paso 1: Agrupar

$$ax + bx + ay + by$$
$$(ax + bx) + (ay + by)$$

Paso 2: Identificar el factor común

$$(ax + bx) + (ay + by)$$
$$= x(a + b) + y(a + b)$$

Ahora, ¿qué sucede? Los dos paréntesis son iguales

$$= (x + y)(a + b)$$

Ya tenemos lo tenemos en su expresión más simple.

Bien, tenemos conocimiento de factorizar por factor común y factor común por agrupación. Ahora nos corresponde que conozcas otras maneras de factorización.

Factorización de Trinomio

A. **Factorización del Trinomio Cuadrado Perfecto** – este nombre se le otorga a los términos que cumplen con las siguientes características.
   1. El primer y tercer término tiene raíz cuadrada exacta y son positivos.

2. El segundo término es igual a dos veces el producto de las raíces cuadradas y puede ser positivo o negativo. Y se factoriza como una suma o diferencia dependiendo del segundo término.

Ejemplo:

$$x^2 + 10x + 25$$
$$(x + 5)(x + 5)$$

B. **Trinomio de la forma $\boldsymbol{x^2 + bx + c}$** - existen algunos trinomios que no son cuadrados perfectos y también se pueden factorizar, solo por un método diferente.

Ejemplo:

$$x^2 + 5x + 6$$

La factorización de este trinomio es un producto de binomios con un término en común.

Paso 1: Descomponer en factores el x^2

Así,

$$x^2 + 5x + 6$$
$$(x \quad)(x \quad)$$

Paso 2: Buscar factores de la constante que sumados o restados obtenga el segundo término.

Continuando con nuestro ejemplo, buscamos los factores de 6.

$$6 \times 1 \quad \{6 + 1 = 7 \qquad 6 - 1 = 5$$
$$2 \times 3 \quad \{2 + 3 = 5 \qquad 2 - 3 = -1$$

Si observas tenemos dos posibles respuestas, pero al ser todos los términos del enunciado positivos, la combinación de factores debe ser positiva.

Así,

$$x^2 + 5x + 6$$
$$(x \quad)(x \quad)$$
$$(x + 2)(x + 3)$$

Y ya está factorizado el trinomio, solamente utilizando el primer y tercer término del enunciado.

Es tu turno

Ya estás listo para realizar estos ejercicios:

1) $x^2 + 2x + 1$
2) $x^2 + 7x + 10$
3) $x^2 - 2x - 15$

C. Factorización de Trinomio de la forma $\boldsymbol{ax^2+bx+c}$

Este es un trinomio cuyo coeficiente numérico de x^2 es mayor 1.
¿Cómo puedo factorizarlo?

1. Se debe ordenar los términos de la forma ax^2+bx+c
2. Se multiplica todo el trinomio por el coeficiente del término cuadrático y se divide toda la expresión entre el mismo coeficiente. El segundo término solo se deja indicada la multiplicación.
3. Se simplifica el producto para expresarlo como un trinomio de la forma x^2+bx+c
4. Se factoriza el trinomio.
5. Se obtiene el factor común de cada binomio encontrado y se simplifica para eliminar el coeficiente del término cuadrático que está dividiendo.
6. El cociente que resulte será la solución de la expresión original dada.

Veamos el siguiente ejemplo:
Factoriza la expresión $6x^2-7x-3$

Solución:

$$6x^2-7x-3$$

$$\boldsymbol{\frac{6(6x^2-7x-3)}{6}}$$

$$\boldsymbol{\frac{6(6x^2-7x-3)}{6}=\frac{36x^2-7(6x)-18}{6}}$$

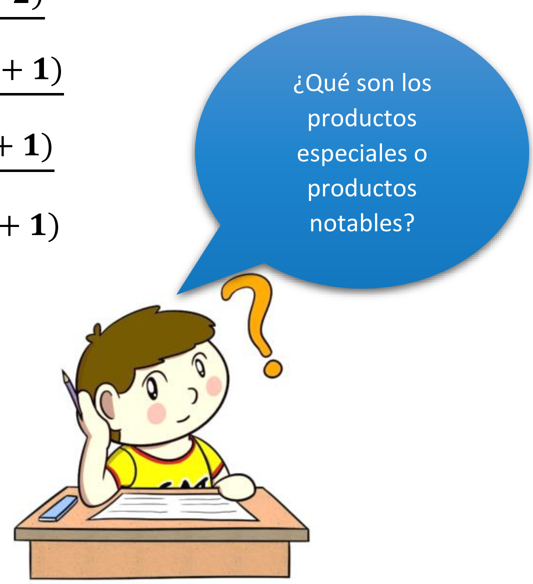
$$\boldsymbol{\frac{(6x)^2-7(6x)-18}{6}}$$

$$\boldsymbol{\frac{(6x-9)(6x+2)}{6}}$$

$$\boldsymbol{\frac{3(2x-3)2(3x+1)}{6}}$$

$$\boldsymbol{\frac{6(2x-3)(3x+1)}{6}}$$

$$\boldsymbol{=(2x-3)(3x+1)}$$



Los **productos notables o productos especiales** son los que están determinados como expresiones **algebraicas** que pueden **factorizarse de manera inmediata**, sin recurrir a un proceso de diversos pasos. Hasta el momento has aprendido a factorizar de diferentes maneras que conlleva varios pasos. Con estos productos especiales o notables verás que sencillo podrás resolverlo.

A. **Diferencia de cuadrados:**

Se le llama diferencia de cuadrados al binomio conformado por dos términos a los que se les puede extraer raíz cuadrada exacta.

$$(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$$

Ejemplo: $9x^2 - 4y^2$

Solución: Si observas tanto el $9x^2$ como el $4y^2$ son cuadrados, a ambos términos se les puede extraer la raíz cuadrada. La factorización de esa expresión es

$$9x^2 - 4y^2 = (3x - 2y)(3x + 2y)$$

B. **Suma de Cubos**

La suma de dos cubos perfectos se descompone en dos factores, el primero es la suma de sus raíces cúbicas, y el segundo se compone de el cuadrado de la primera raíz menos el producto de ambas raíces más el cuadrado de la segunda raíz.

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Ejemplo:

$$x^3 + 27 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9)$$

C. **Diferencia de Cubos**

La diferencia de dos cubos perfectos se descompone en dos factores, el primero es la diferencia de sus raíces cúbicas, y el segundo se compone del cuadrado de la primera raíz más el producto de ambas raíces más el cuadrado de la segunda raíz.

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Ejemplo:

$$8x^3 - 64 = (2x - 4)(4x^2 + 16)$$

Conjunto

Entenderemos por un ***conjunto*** la reunión o colección de objetos con características comunes. Los objetos pertenecientes al conjunto reciben el nombre de ***elementos*** o ***miembros*** del conjunto. Regularmente se utilizan llaves para reunir a los elementos del conjunto. Los elementos dentro de las llaves se escriben separados por comas. Se utilizan letras mayúsculas para representar o nombrar a los conjuntos.

Los conjuntos se expresan:

- ✓ Forma verbal
- ✓ Forma de lista o enumerados
- ✓ Notación de enunciado

Ejemplo:

- ✓ Forma verbal: El conjunto de todos los números enteros positivos mayores que 5 inclusive.
- ✓ Forma de lista: {5, 6, 7…}
- ✓ Notación de enunciado:
  $\{x \mid x$ es un número entero positivo mayor o igual a 5$\}$

La siguiente tabla resume los tipos de intervalos que puedes considerar al momento de estudiar funciones, sus dominios y rangos:

https://sites.google.com/site/salon706/intervalos-e-inecuaciones-lineales

Notacion de Conjunto	***Notacion de Intervalo***	***Notacion Grafica***	
$\{x \mid a<x<b\}$	(a,b)	(┤┤┤┤┤┤┤┤-) a 0 b	Intervalo abierto en ambos extremos
$\{x \mid a\leq x\leq b\}$	$[a,b]$	-[┤┤┤┤┤┤┤·]- a 0 b	Intervalo cerrado en ambos extremos
$\{x \mid a\leq x<b\}$	$[a,b)$	-[┤┤┤┤┤┤·)- a 0 b	Intervalo cerrado en “a” y abierto en “b”
$\{x \mid a<x\leq b\}$	$(a,b]$	-·(┤┤┤┤┤┤·]- a 0 b	Intervalo abierto en “a” y cerrado en “b”
$\{x \mid x\geq b\}$	$[b,\infty)$	⟶ ∞ ┤[┤┤┤┤┤┤┤- b 0	Intervalo cerrado en “b” y abierto hasta infinito
$\{x \mid x\leq b\}$	$(-\infty,b]$	−∞ ⟵ ┤┤┤┤┤┤┤┤]- 0 b	Intervalo abierto desde menos infinito y cerrado en “b”
$\{x \mid x<b\}$	$(-\infty,b)$	−∞ ⟵ ┤┤┤┤┤┤┤·)- 0 b	Intervalo abierto desde menos infinito y abierto hasta “b”
$\{x \mid x>b\}$	(b,∞)	⟶ ∞ ┤(┤┤┤┤┤┤┤- b 0	Intervalo abierto en “b” y abierto hasta infinito

Expresiones racionales
Las **expresiones racionales** son fracciones que tienen un polinomio en el numerador o en el denominador o en ambos.
Una expresión racional se considera **simplificada** si el numerador y el denominador no tienen factores en común.
Ejemplo:

$$\frac{\boldsymbol{x^2+3x}}{\boldsymbol{x^2+5x}}$$

Si observas el ejemplo, tengo un factor común.

$$\frac{\boldsymbol{x^2+3x}}{\boldsymbol{x^2+5x}} = \frac{\boldsymbol{x(x+3)}}{\boldsymbol{x(x+5)}}$$

Luego de hallar el factor común, simplifico la expresión racional

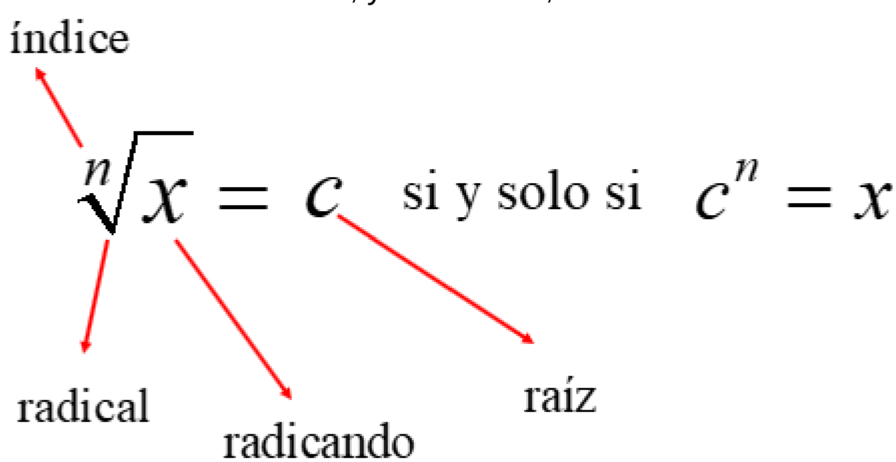
$$\frac{\boldsymbol{x^2+3x}}{\boldsymbol{x^2+5x}} = \frac{\boldsymbol{x(x+3)}}{\boldsymbol{x(x+5)}} = \frac{\boldsymbol{x+3}}{\boldsymbol{x+5}}$$

Veamos otro ejemplo:

Paso 1: enunciado a simplificar	$\frac{(x^2-1)}{x^2-7x+6}$
Paso 2: factorizar cada expresión	$\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-6)}$
Paso 3: cancelar los binomios equivalentes	$\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-6)}$
Paso 4: el enunciado está en su mínima expresión	$\frac{x+1}{x-6}$

Notación radical y exponente racional:

Definición:
Decimos que la raíz enésima de *x* es *c*, y escribimos;



Debes tener en cuenta lo siguiente, todo número positivo tiene dos raíces cuadradas, *una raíz cuadrada positiva* o principal y *una raíz cuadrada negativa*. Para cualquier número positivo x, escribimos la raíz cuadrada positiva como $\sqrt{x}$ y la raíz cuadrada negativa como $-\sqrt{x}$

Ejemplo:

$$\sqrt{4} = \pm 2$$

¿Por qué? $(2)^2 = 4$ y $(-2)^2 = 4$

Para cualquier número real a

$$\sqrt[n]{a^n} = |a| \quad \text{si } n \text{ es par y } a < 0.$$

$$\sqrt[n]{a^n} = a \quad \text{si } n \text{ es par y } a \geq 0.$$

$$\sqrt[n]{a^n} = a \quad \text{si } n \text{ es impar.}$$

Propiedades de los radicales

Sean *m* y *n* números naturales mayores que 1. Si *a* y *b* son números reales tal que *a* > 0 y *b* > 0 (números positivos), entonces;

1. $\sqrt[n]{a^n} = a$
2. $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$
3. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
4. $\sqrt[n.m]{a^{m.k}} = \sqrt[n]{a^k}$
5. $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

Exponentes racionales:
Las raíces o radicales representan exponentes racionales.

Potencia

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

índice

Ejemplos:
$x^{2/3} = \sqrt[3]{x^2}$

Números imaginarios y complejos

$$i = \sqrt{-1}$$

Los pitagóricos (500- 275a.C.) encontraron que la ecuación simple $x^2 = 2$ no tenía soluciones numéricas racionales. Los números irracionales no se establecieron firmemente en las matemáticas hasta el siglo XIX. Es por eso por lo que se crean los números imaginarios.

Hablemos un poco de la historia de los números imaginarios y complejos.

$$\boxed{\sqrt{-1} = ?}$$

Por años se trató de resolverlo, pero el mismo no tenía solución numérica real hasta que se inventaron un nuevo conjunto de números. Este conjunto se conoce con el nombre de números complejos y se establece finalmente en las matemáticas en el siglo XIX.

Veamos un breve resumen de su trayectoria.

Breve historia de los números complejos

Fecha Aproximada	PERSONA		EVENTO
50		Herón de Alejandría	Primero en encontrar la raíz cuadrada de un número negativo.
850		Mahavira de India	Decía que un negativo no tenía raíz cuadrada, ya que no era cuadrado.
1545		Cardano de Italia	Las soluciones de las ecuaciones cúbicas implican raíces cuadradas de números negativos.
1637		Descartes de Francia	Introdujo los términos real e imaginario.
1748		Euler de Suiza	Usó i para $\sqrt{-1}$
1832		Gauss de Alemania	Introdujo el término número complejo.

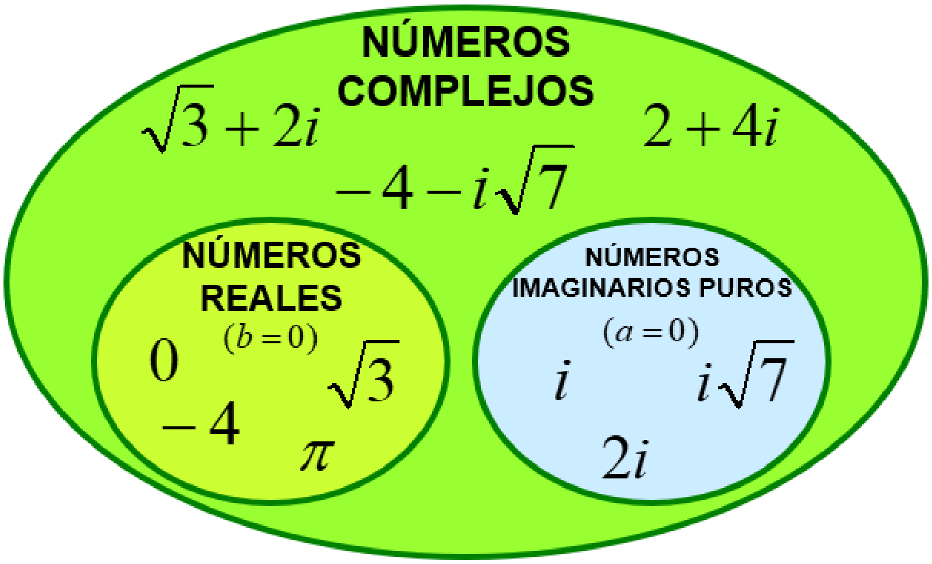
Número complejo:
Un número complejo es un número de la forma

a+*bi* **Forma estándar**

donde *a* y *b* son números reales e ***i*** se llama la **unidad imaginaria**,
i es un símbolo usado en este nuevo sistema de números complejos.

Parte real → $3-2i$ ← Parte imaginaria

CONJUNTO DE NÚMEROS COMPLEJOS



Nombre de clases particulares de números complejos

Unidad imaginaria	$\boldsymbol{i}$
Número complejo	$a+bi$ a y b son números reales
Número imaginario	$a+bi \quad b \neq 0$
Número imaginario puro	$0+bi=bi \quad b \neq 0$
Número real	$a+0i=a$
Cero	$0+0i=0$
Conjugado de $\boldsymbol{a+bi}$	$a-bi$

De ahora en adelante cuando trabajes con números complejos

$$i=\sqrt{-1}$$

$$i^2=-1$$

$$\sqrt{-a}=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{a}=i\sqrt{a}$$

cuando $\boldsymbol{a} > 0$

La unidad imaginaria *i* permite simplificar radicandos negativos. Antes, ¿qué sucedía con un ejercicio así $\sqrt{-81}$? Te decían que no tiene solución real. Pero ahora vas a poder resolver esos ejercicios.

Observa

$$\sqrt{-81} = \sqrt{-1 \cdot 81}$$
$$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{81}$$
$$i \cdot 9$$
$$= 9i$$

Recuerda:

$$\sqrt{-1} = i$$

Operaciones con números complejos

Al igual que los números reales, con los números complejos también podemos realizar las operaciones básicas.

A. Suma:
   (*a* + *bi*) + (*c* + *di*) = (*a* + *c*) + (*b* + *d*)*i*

   Veamos el siguiente ejemplo:

$$(3 + 4i) + (8 + 2i)$$

   Para poder sumarlos debes tomar la parte real y sumarla, luego la parte imaginaria, así:

$$(3 + 4i) + (8 + 2i)$$
$$(3 + 8) + (4i + 2i) = 11 + 6i$$

B. Multiplicación:

$$(2 - 3i)(6 + 2i)$$

   Utilizando el método FOIL realiza la multiplicación

Recuerda:

$$i^2 = -1$$

4

3

$$(2 - 3i)(6 + 2i)$$

1

2

$$12 + 4i - 18i - 6i^2$$
$$12 + 4i - 18i - 6(-1)$$
$$12 + 4i - 18i + 6$$
$$18 - 14i$$

Potencias de *i* para referencia

Potencias de i
$i^1 = i$
i^2 =-1
$i^3 = i^2 i = (-1)i = -i$
$i^4 = i^2 i^2 = (-1)(-1) = 1$
$i^5 = i^4 i = (1)i = i$
$i^6 = i^4 i^2 = (1)(-1) = -1$
$i^7 = i^4 i^3 = (1)(-i) = -i$
$i^8 = i^4 i^4 = (1)(1) = 1$

Es tu turno!!

Ahora evaluaremos lo que has aprendido al momento. Esta tarea la trabajarás y la enviarás a tu maestro(a) para ser evaluado. Valor (46puntos)

I. Suma o resta de números polinomios: Recuerda: simplificar y resolver.

1. $(5x^2 - 3) - (-7x^2 + 4x - 5) =$
2. $2y + x^2y - (3yx^2 - (3yx^2 - \frac{5}{2}y) =$
3. $(2x^3 + 5x - 3) - (2x^3 - 3x^2 + 4x) =$
4. $(-2x^3 - 7k^2 + 5k) + (6k^2 + 3k) =$
5. $(18x + 14) - (3x^2 + x - 9) =$

II. Multiplicación y/o división:

1. $(z - 4z^4)(z^{-3} + 2) =$
2. $\frac{6x^7 - 3x^5 + 9x^2}{-3x^2} =$
3. $y = 2x(4x^2 - 3x) =$
4. $(4a^2 - 3)(3a^2 + 1.5) =$
5. $\frac{-10x^5 + 15x^2}{5^x} =$

III. Factoriza los siguiente polinomios:

Ejercicio #1: $9n^2 - 16 =$	Ejercicio #2: $8c^4 + 4c^2 - 2c$
Ejercicio #3: $35x^5 - 48x =$	Ejercicio #4: $\frac{1}{4} - 9x^2 =$
Ejercicio #5: $X^4 + 7x^3 - 11x^2 - 87x + 90 =$	Ejercicio #6: $X^4 - 3x^3 - 17x^2 + 39x - 20 =$

Ejercicio #7: $a^2 - 10a + 25 =$	Ejercicio #8: $X^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 =$

IV. Resuelve los siguientes números complejos:

1. $5(6 - 2i) =$

2. $(5i)\ (5i) =$

3. $(3 + i)\ (4 - i) =$

4. $\frac{6+4i}{2+i} =$

5. $\frac{1}{4+2i} =$

Lección 2 Modelos Matemáticos

Ecuaciones e inecuaciones lineales

Ecuaciones lineales

Antes de comenzar las ecuaciones, no podemos dejar de repasar el lenguaje algebraico. Parte esencial que te servirá de gran ayuda al trabajar las ecuaciones.

Lenguaje Algebraico

Al lenguaje que usamos en operaciones aritméticas en las que sólo intervienen números se llama lenguaje numérico. En ocasiones empleamos letras para representar cualquier número desconocido, realizamos operaciones aritméticas con ellas, e incluso, las incluimos en expresiones matemáticas para poder calcular su valor numérico.

A este conjunto de cantidades numéricas y literales relacionadas entre sí por las operaciones de sumas, diferencias, multiplicaciones, divisiones, potencia y extracción de raíces le llamamos expresión algebraica.

La **ecuación** es la protagonista en muchos problemas de aplicación y es fundamental en el desarrollo matemático de ustedes estudiantes.

Si vemos la Expresión algebraicas vs. Ecuación, podemos decir:

- Que la **Ecuación** (en una variable): es un enunciado de igualdad entre dos expresiones algebraicas (de esa variable).
- Que la **Raiz o Solución de una ecuacion**: valor que el sustituirlo en la variable de la ecuacion la hace cierta.

Ejemplo al traducir las siguientes expresiones en lenguaje simbólico. (Indique si es una expresión algebraica o una ecuación).

- Un número disminuido en 10.

  Solución: x – 10 Expresión algebraica
- El triple de la suma de cuatro enteros consecutivos.:

  Solución: 3(x + x+1, x+2, x+3) Expresión algebraica
- El cuadrado de la suma de dos enteros pares consecutivos.

  Solución: $((x+2)+x+4))^2$ Expresión algebraica
- La suma del cuadrado de dos enteros pares, consecutivos es 50

  Solución: $(x+2\ x+4)^2 = 50$ Ecuación

- En un rectángulo el largo mide 3cm más que el doble del ancho y su área es 10 cm cuadrados.

  Solución:2a +3= 10 Ecuación

Es tu turno

Ejercicios de practica #2

Traduce las siguientes expresiones en lenguaje simbólico. (Indique si es una expresión algebraica o una ecuación).

1. Dos veces un número más 20 es 70.
2. El triple del cuadrado de un numero menos el cuádruple de otro.
3. El cubo de la diferencia de las raíces cuadradas de dos números,
4. La diferencia entre un número y 10 es igual a 20.
5. La raíz cuadrada de un número es igual a 25.
6. El doble de un número más 3 es igual a 15.
7. El cubo de un número es igual a 27.

Las **Ecuaciones** en la astronomía son de gran relevancia porque nos permite calcular modelos de movimiento de las estrellas y de los planetas. También ayuda a calcular la velocidad de los cuerpos celestes. Con la computadora y el telescopio, crea ecuaciones para medir con exactitud

Una **Ecuación** es igualdad que contiene variables. Podemos mencionar como ejemplos de una ecuación:

- X + 2 =5
- 2x + 5 = 9
- -2x – 6y = 12

Para resolver ecuación de un paso

1. y - 5.5 = 11

   y = 11 + 5.5 **Suma 5.5 a ambos lados de la ecuación para despejar la variable**

   y = 16.5

Para resolver una ecuación, realiza operaciones inversas para despejar la variable en un lado de la ecuación. Puedes usar las propiedades de igualdad para justificar los pasos que sigues al resolver una ecuación.

Propiedades de las igualdades

Si a = b, entonces, $a + c = b + c$

Si a = b, entonces, $a - c = b - c$

Si a = b, entonces, $a \cdot c = b \cdot c, c \neq 0$

Si a = b, entonces, $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}, c \neq 0.$

Para resolver ecuaciones de dos pasos y de varios pasos

Debes recordar que una ecuación muestra que dos cantidades son iguales. Una ecuación suele contener una variable. Una solución de una ecuación es el valor de la variable que hace que la ecuación sea verdadera

1. 18 = 2 - 4x

   $18 = 2 - 4x$

   $\underline{-2}$ $\underline{-2}$ Propiedad de igualdad de la resta

   16 = -4x

   $\frac{16}{-4} = \frac{-4x}{-4}$ Propiedad de igualdad de la división

   -4 = x

La **Ecuación lineal** es una ecuación en la cual el exponente de la variable es 1.
es una igualdad que involucra una o más variables a la primera potencia y no contiene productos entre las variables, es decir una **ecuación** que involucra solamente sumas y restas de una variable a la primera potencia.

Para ayudarte a resolver una ecuación lineal puedes usar el siguiente procedimiento como guía:
1. Simplifica las expresiones algebraicas de los dos miembros de la ecuación: utilizando la propiedad distributiva o combinando términos semejantes (de ser necesario).
2. Suma o resta la misma expresión a ambos miembros: para convertir la ecuación a la forma ax = b.
3. Multiplica o divide a ambos miembros por la misma expresión: para convertir la ecuación a la forma x = k, k constante.
4. Verifica la solución: sustituyendo el valor de la variable en la ecuación original y simplificar para determinar si se obtiene un enunciado cierto (proceso opcional).

Inecuaciones lineales

Una inecuación es una desigualdad algebraica en la que aparecen una o más incógnitas en los miembros de la desigualdad. La solución de una inecuación lineal se puede representar haciendo uso de intervalos en la recta numérica, la cual contiene infinito números reales

- Podemos ver los siguientes **ejemplos** de inecuaciones

$$\sqrt{x^2+1} > 2, \quad |x+5| + |x+2| \geq 1, \quad x^2 - 3 < \frac{1}{2}.$$

Al resolver una inecuación encuentro los valores de la incógnita (valor desconocido) para los cuales se cumple la desigualdad. La solución de una inecuación es cualquier valor que hace que la desigualdad sea verdadera. Las desigualdades suelen tener infinitas soluciones. Una manera de representar el conjunto solución de una desigualdad con una variable es representarlo gráficamente en una recta numérica. Puedes resolver las desigualdades lineales usando métodos similares a los que usas para resolver las ecuaciones lineales

Ejemplos

Resuelve la siguiente inecuación:

1. $x + 5 < 14$

   $x < 14 - 5$ **Resta 5 de ambos lados de la inecuación para**

   $x < 9$ **despejar la variable**

2. $\frac{x}{3} \leq -4$

   $(3)\frac{x}{3} \leq -4(3)$ **Multiplica ambos lados por 3**

   $x \leq -12$

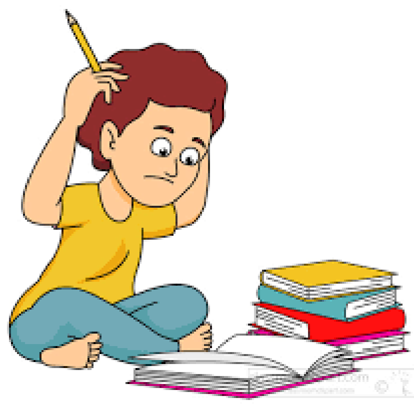
Podemos observar que, para resolver desigualdades de un paso:

Puede sumar o restar cualquier número a ambos lados de una desigualdad.

Si multiplica o divide ambos lados de una desigualdad por un número negativo, la desigualdad se invierte.

Si la desigualdad tiene valor absoluto, utilice la propiedad del valor absoluto correspondiente:

- $|a| < b$ es equivalente a $-b < a < b$
- $|a| > b$ es equivalente $a < -b$ o $a > b$



Al resolver una inecuación debemos considerar:

- encontrar todas sus soluciones reales. (**conjunto solución de la inecuación**).

  Al igual que en el caso de las ecuaciones,
- al resolver, se expresa por extensión o como unión de intervalos disjuntos.

Ejemplos

Las desigualdades se originan de las relaciones de orden, por lo tanto, recordemos los siguientes hechos:

1. Si colocamos dos números distintos en la recta numérica real, el número de la derecha es mayor que el de la izquierda y el número de la izquierda es menor que el de la derecha. Se denota a < b, si a está a la izquierda de b ó b > a, si b está a la derecha de a. Aplicar el concepto desigualdad lineal en situaciones de la vida diaria.

Se le conoce como **intervalos** a ciertos conjuntos de números reales, que corresponden geométricamente a segmentos de recta. Si a < b, entonces el intervalo abierto de *a* a *b* está formado por todos los números entre *a* a *b* y se denota con (a, b). El **intervalo cerrado** de *a* a *b* incluye los puntos extremos y se denota con [a, b]. Es por eso que, usando la notación constructiva de conjuntos, podemos escribir:

$(a, b) = \{x| \ a < x < b\}$ El intervalo abierto (a, b)

$[a, b] = \{x| \ a \leq x \leq b\}$ El intervalo cerrado $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$

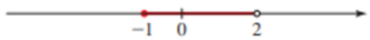
Se le conoce la notación de intervalo para representar la solución de una desigualdad.

Notación	Descripción de conjunto	Gráfica
(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	
$[a, b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	
$[a, b)$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	
(a, ∞)	$\{x \mid a < x\}$	
$[a, \infty)$	$\{x \mid a \leq x\}$	
$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$	
$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \leq b\}$	
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$ (conjunto de todos los números)	

Al expresar el intervalo en términos de desigualdades y luego trazar su gráfica, tenemos los siguientes ejemplos:

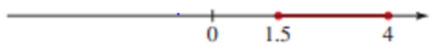
1. [-1, 2) = Notación de Intervalo

   Término de desigualdad = { xl $-1 \leq x < 2$}

   Gráfica 

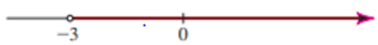
2. [1.5, 4] = Notación de intervalo

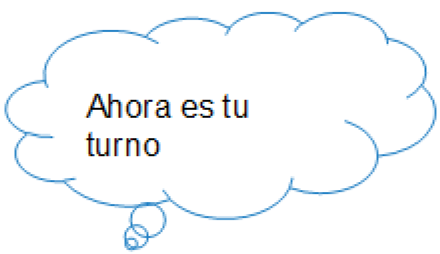
   Término de desigualdad= {xl $1.5 \leq x \leq 4$}

   Grafica 

3. (-3, ∞) = Notación de intervalo

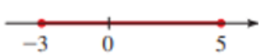
   Término de desigualdad= $\{\mathrm{xl} -3 < x\}$

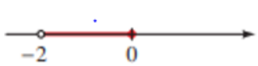
   Gráfica 



Ejercicio 2

Exprese cada conjunto en notación de intervalos.

1. 

2. 

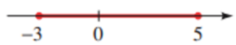
A. Exprese la desigualdad con notación de intervalo, y después grafique el intervalo correspondiente.

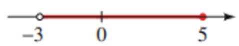
1. $x \leq 1$

2. $2 < x \leq 1$

3. $x > -1$
4. $1 \leq x \leq 2$
5. $x \geq -5$

C. Exprese cada conjunto mediante la notación de los intervalos

1. 

2. 

3. 

Inecuaciones de dos pasos

Para resolver una desigualdad de dos pasos, deshaga la suma o la resta primero, usando las operaciones inversas, y luego deshaga la multiplicación o la división. La operación inversa de la suma es la resta y viceversa.

De forma similar, la operación inversa de la multiplicación es la división y viceversa.

En caso de que multiplique o divida por un coeficiente numérico negativo en ambos lados, el sentido de la desigualdad cambia.

Ejemplo

Resuelva $2x+1<7$.

- Primero, necesitamos aislar el término de la variable en un lado de la desigualdad. Aquí, en la izquierda, 1 se suma al término de la variable, 2*x*. La operación inversa de la suma es la resta.

  $2\mathrm{x} + 1 - 1 < 7 - 1$ reste 1 en ambos lados

  $2x < 6$

- Ahora, tenemos la variable *x* multiplicada por 2. La operación inversa de la multiplicación es la división.

  $\frac{2x}{2} < \frac{6}{2}$ divida ambos lados entre 2.

  $x < 3$

- Esto es, la desigualdad es verdadera para todos los valores de x que sean menores que 3. Por lo tanto, las soluciones de la desigualdad son todos los números menores que 3.

Ecuación e inecuación con valor absoluto

Ecuación con valor absoluto

Las **ecuaciones** con una variable o variables dentro de barras de **valor absoluto** se conocen como **ecuaciones** de **valor absoluto**. El valor absoluto se define como la distancia que hay entre un número y su origen. En general, para resolver una ecuación con valor absoluto debemos buscar aquellos valores que satisfagan la expresión $|x| = k$ utilizando la siguiente información:

$$|x| = k \text{ es equivalente a: } x = k \text{ ó } x = -k$$

Las ecuaciones de valor absoluto son ecuaciones donde la variable está dentro de un operador de valor absoluto como, por ejemplo: $|2x - 3| = x + 5$.

Si observamos, para resolver $|2x - 2| = x + 5$ hay trabajar dos casos:

Caso 1: cuando x = k	Caso 2: cuando x = -k
$2x - 2 = x + 5$ $2x - x = 5 + 2$ $x = 7$	$2x - 2 = -(x + 5)$ $2x - 2 = -x - 5$ $2x + x = -5 + 2$ $\frac{3x}{3} = \frac{-3}{3}$ $x = -1$

Así, de esta forma, se obtendrán las siguientes soluciones x= 7,-1

Otro ejemplo:

Encuentre la solución para $\left|3x + \frac{1}{4}\right| = |x - 6|]$

- Hay que resolver dos casos: cuando x = k y cuando x = -k

Caso 1: cuando x = k	Caso 2: cuando x = -k
$3x + \frac{1}{4} = x - 6$ $3x - x = = 6 - \frac{1}{4}$ $2x = -\frac{25}{4}$ $x = -\frac{25}{4} . \frac{1}{2}$ $x = -\frac{25}{8}$ $x = -3\frac{1}{8}$	$3x + \frac{1}{4} = -x + 6$ $3x + x = 6 - \frac{1}{4}$ $4x = \frac{25}{4}$ $x = \frac{25}{4} . \frac{1}{4}$ $x = \frac{25}{16} = 1\frac{9}{16}$

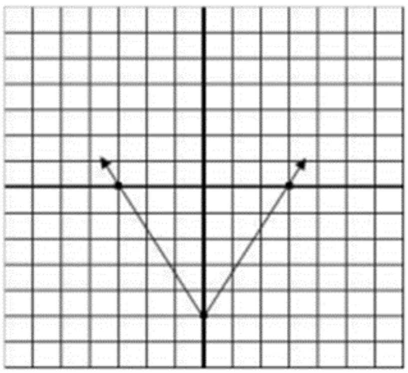
Así que, las soluciones son $-3\frac{1}{8}, 1\frac{9}{16}$

Ahora es tu turno

Ejercicio #3: Resuelve las ecuaciones con valor absoluto

1. $\left|\frac{2x}{3} + 10\right| = 0$
2. $\left[\frac{x}{2} + 2\right] = 7x - 5$
3. $\left|9x + \frac{1}{3}\right| = |x - 3|$

Interpretar la relación entre la solución de una ecuación de valor absoluto y el punto de intersección con el eje x y el de y



Intercepciones son: (-3,0), (0,5), (3,0)

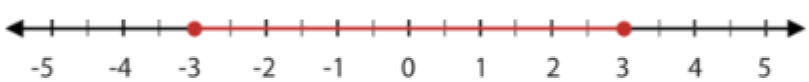
Intercepción en x: (-3,0), (3,0)

Intercepción en y: (0,-5)

Inecuación con valor absoluto

La inecuación de valor absoluto es una combinación de dos conceptos: valores absolutos e inecuaciones lineales. Por lo tanto, para resolver una inecuación de valor absoluto debes usar los métodos de resolución de problemas de ambas materias.

Empezaremos viendo el ejemplo: $|x| \leq 3$ Ya que representa la distancia desde cero, las soluciones a esta inecuación son aquellos números cuya distancia desde el cero es menor o igual a 3. El siguiente gráfico muestra esta solución:$|x|$



Este es el gráfico para la inecuación compuesta por: $-3 \leq x \leq 3$

En el siguiente ejemplo calcularemos

los valores de x que satisfacen la desigualdad lx + 2l < 2. Para resolver esta inecuación, debemos resolver para x< 2 y para x> -2. Si observas, ahora se trabajan dos inecuaciones como se presenta a continuación:

Inecuación 1

$x + 2 < 2$ En la primera inecuación: < 2 (menor que dos)

$\underline{\quad -2 \quad -2}$ despejo para la variable x, resto 2 en ambos lados

$x < 0$ Valores menores que 0

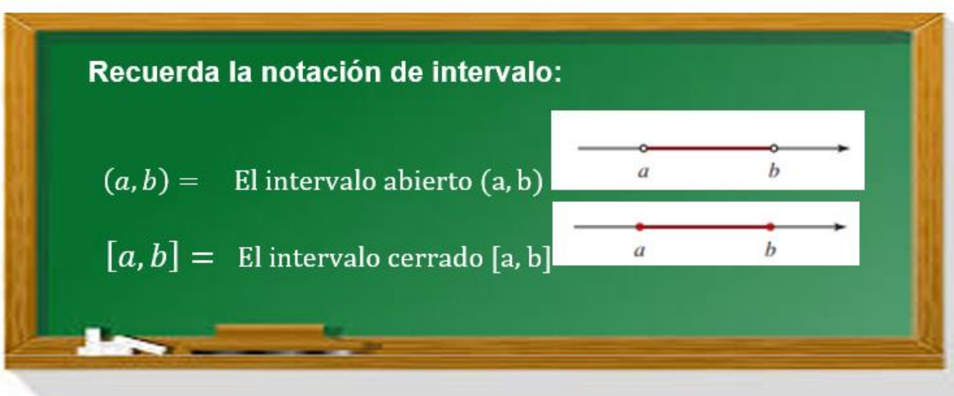
Inecuación 2

$x + 2 > -2$ En la primera inecuación: > -2 (mayor que negativo dos)

$\underline{\quad -2 \quad -2}$ despejo para la variable x, resto 2 en ambos lados

$x > -4$ Valores mayores que -4

La solución de esta primera ecuación viene dada por todos los valores menores que 0, formalmente, $(-\infty, 0)$. La solución de esta segunda ecuación viene dada por todos los valores mayores que -4, formalmente (-4, ∞). Por tanto, la intersección de estas dos soluciones es la solución es: (-4, 0).



Solución: (-4, 0).

Es tu turno

Fórmulas y Problemas de Aplicación

Resuelve cada problema verbal creando una ecuación lineal y resolviendo la misma.

1. Un vendedor de donas gasta $30.00 dólares en ingredientes y cobra $ 2.00 por cada caja de donas vendida. Si al final del día su ganancia neta de $86.000 dólares, ¿cuántas cajas de donas vendió?

2. Una compañía de celulares cobra una cuota de servicio de $40 y $1 el minuto por llamar a tu papá en Ponce. Escribe una ecuación para el pago que facturará la compañía de celulares si hablas 5, 10, 15 y 20 minutos en llamar a Ponce.

Fórmulas y Problemas de Aplicación con valor absoluto

Te piden resolver | a+3 | ≤ 5 ¿En qué dos inecuaciones se separan esto?

La velocidad de una bola de boliche está dada por la fórmula $v = 20t - 60$, donde el tiempo está expresado en segundos y la velocidad está expresada en pies por segundo. Encuentra los tiempos en que la velocidad es mayor ao igual a 40 pies por segundo.

Interceptos en una gráfica

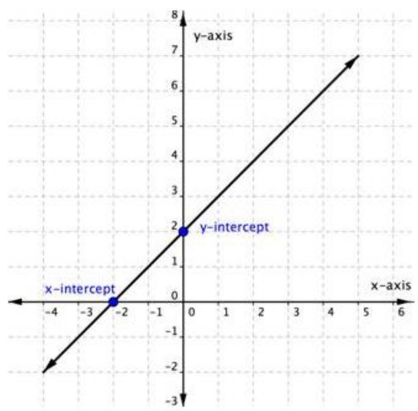
Interpretar la relación entre la solución de una ecuación lineal y el punto de intersección con el eje x y el de y

Los puntos donde la gráfica cruza o interseca los ejes en el plano cartesiano se conocen como interceptos. No siempre las gráficas tienen interceptos con los ejes. Pero, si buscamos los interceptos, entonces tendremos información importante para construir la gráfica de la ecuación.

¿Cómo podemos encontrar los interceptos en x y en y?

Las intersecciones de una línea son los puntos donde la línea se intersecta, o cruza, los ejes vertical y horizontal.

La línea recta de la gráfica siguiente intersecta los dos ejes coordenados. El punto donde la línea cruza el eje x se llama **<u>intersección en *x*</u>**. La **<u>intersección en *y*</u>** es el punto donde la línea cruza el eje y.



La intersección en *x* es el punto (−2,0).

La intersección en *y* es el punto (0, 2).

Recuerda

La intercepción *x* es la coordenada del punto que cruza o toca el eje *x*.

Interceptos a partir de una ecuación

Intercepto en x

Para encontrar los interceptos en x se iguala la y a cero (0) en la ecuación (y = 0) y se resuelve para x. Algunas ecuaciones no tienen intercepto en x. La coordenada de y en el intercepto con el eje de x es 0.

Ejemplos: Encuentra intercepto en x.

1. $y = 3x + 2$ igualar la y a cero (0)

   $0 = 3x + 2$ despejar para x (cambiar el signo al mover el 2 a la izquierda)

   $0 - 2 = 3x$ dividir ambos lados entre 3

   $-\frac{2}{3} = \frac{3x}{3}$

   $-\frac{2}{3} = x$ o sea $x = -\frac{2}{3}$

   El punto de intercepción de la gráfica de la ecuación con el eje de x es $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$

2. $y = 2x$ igualar la y a cero (0)

   $\frac{0}{2} = \frac{2\mathrm{x}}{2}$ dividir ambos lados entre 2

   X = 0

   El punto de intercepción de la gráfica de la ecuación con el eje de x es (0,0)

Interceptos en y

Recuerda

Es la coordenada *y* del punto que cruza o toca el eje *y*

Para encontrar los interceptos en *y* se iguala la x cero (0), esto es x = 0, y se resuelve para y. No siempre las ecuaciones tienen intercepto en y.

Ejemplos: Encuentra el intercepto en y.

1. $y = 7x + 9$ igualar la x a cero (0)

   $y = 7(0) + 9$ resolver

   $y = 0 + \ \ 9$ resolver

   $y = 9$

   El punto de intercepción de la gráfica de la ecuación con el eje de y es $(0{,}9)$.

2. $y = x^2 + 4x + 8$ igualar la x a cero (0)

$y = (0)^2 + 4(0) + 8$ resolver

$y = 0 + 0 + 8$ resolver

$y = 8$

El punto de intersección de la gráfica de la ecuación con el eje de y es $(0{,}8)$.

Ecuaciones lineales de dos variables

La construcción de edificios y puentes requiere de una planificación y, ejecución cuidadosa y precisa. El trabajo de los ingenieros y arquitectos reúne estas características, debido a que deben garantizar la seguridad de los habitantes.

Las estructuras de las obras de ingeniería deben cumplir determinadas condiciones de equilibrio. Estas condiciones se satisfacen por medio de igualdades en las que interfieren el peso de los elementos de la estructura y las fuerzas que sostienen esos pesos. De no cumplirse estas condiciones, las estructuras no se sostendrían y se caerían.

Los ingenieros analizan situaciones de equilibrio haciendo uso de igualdades en las que intervienen variables. Estas igualdades se llaman **ecuaciones**.

Las ecuaciones pueden ser una identidad, pueden ser una contradicción o una ecuación condicional. Para hallar el valor (o valores) de la variable que sean solución de la ecuación. Existen varias formas de crear una gráfica a partir de una ecuación lineal.

- Una manera es crear una tabla de valores para *x* y *y*, luego graficar los pares ordenados en el plano de coordenadas. Sólo hacen falta dos puntos para determinar una línea. Sin embargo, es siempre buena idea graficar más de dos puntos para evitar posibles errores.

- Luego dibujas una línea pasando por los puntos para mostrar todos los puntos que están en la línea. Las flechas a cada extremo indican que la línea continua infinitamente en ambas direcciones. Cada punto en esta línea es una solución de la ecuación lineal.

Ejemplo

Para resolver y graficar la solución de una ecuación lineal debemos hallar el valor (valores) de la variable que sea solución.

1. Evalúa *y* = 2*x* para distintos valores de *x*, y crea una tabla de valores correspondientes de *x* y *y*.

- Convierte la tabla a pares ordenados.
- Grafica los pares ordenados (mostrada abajo).
- Dibuja una línea a través de los puntos que indique todos los puntos en la línea

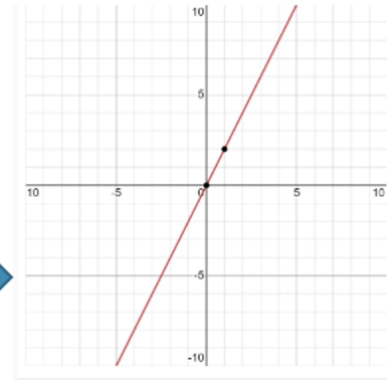
Respuesta: Tabla de Valores

Si, $x = -1$ $\quad y = 2(-1) = -2$
$x = 0$ $\quad y = 2(0) = 2$
$x = 1$ $\quad y = 2(1) = 2$
$x = 2$ $\quad y = 2(2) = 4$

2x	Y
-1	-2
0	0
1	2
2	4

- Convierte la tabla en pares ordenados:
  (-1,-2)
  (0, 0)
  (1, 2)
  (2, 4)

- Dibuja la línea a través de los puntos



Observa cómo todos los puntos se juntan para crear una línea. Puedes entonces pensar en una línea, como una colección infinita de números o puntos individuales que comparten la misma relación matemática.

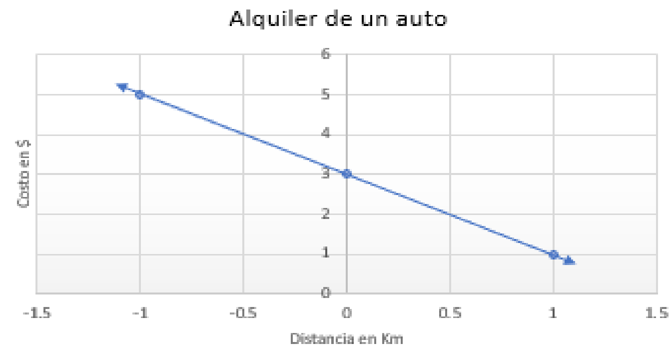
La ecuación lineal graficada arriba se resolvió para *y*. Si la ecuación no está en términos de *y*, es mejor primero despejar la ecuación para *y*. Si no hay *y* en la ecuación, entonces resuelve la ecuación para *x*.

Una de las ecuaciones más utilizadas es la ecuación lineal en dos variables. Estas ecuaciones tienen una forma general: $Ax + By + C = 0$, donde A, B y C son números reales, y x, y son las variables. Podemos dibujar la gráfica de una ecuación lineal en dos variables en el plano de coordenadas o plano cartesiano.

Ejemplo

Sara quiere alquilar un auto que le cuesta $ 30.00 por día más $ 0.25 por cada kilómetro recorrido. Observemos que el costo de un día dependerá de la distancia en kilómetros que recorra. Consideremos que la letra x representa la cantidad de kilómetros que recorra por día, y que la letra y representa el costo de alquiler diario. La siguiente tabla muestra la relación entre la distancia recorrida en kilómetros y los gastos incurridos por el alquiler del auto por día.

x (km)	y ($)
0	30
4	31
8	32
12	33
16	34
20	35



Al unir los puntos se obtiene una línea recta, en la que x representa la cantidad de kilómetros recorridos en un día, mientras que y representa el costo de alquiler de alquiler de ese día.

En este ejemplo solamente se obtuvo una porción de la recta porque el costo y la cantidad de kilómetros recorridos (distancia) no pueden ser negativos.

Tarea 1: Ecuaciones con una variable. Valor: 10 puntos

A. Resuelve las ecuaciones.

1. $5x = 100$
2. $-25 = x + 100$
3. $\frac{y}{4} = 17 =$
4. $c – 18 = -94$
5. $-42a = -84$

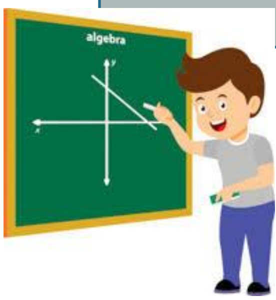
Tarea 2 Ecuaciones con dos variables e interceptos. Valor: 24 puntos

A. Dibuja las gráficas de las siguientes ecuaciones. 15pts
   1. $y = 3x – 2$
   2. $4x + 2y = 8$
   3. $y = x^3 - 1$
   4. $y = x^2 + 3$ Explica en escrito el procedimiento para resolver la ecuación:

B. Encuentra los interceptos en x y en y de las siguientes ecuaciones. 9 pts
   1. $y = - 4x + 5$
   2. $y = x^2 + 3 – 18$
   3. $2y = 6x +$

Gráfica de una ecuación lineal en dos variables

La gráfica de una ecuación lineal en dos variables es siempre una línea recta.



Ejemplo

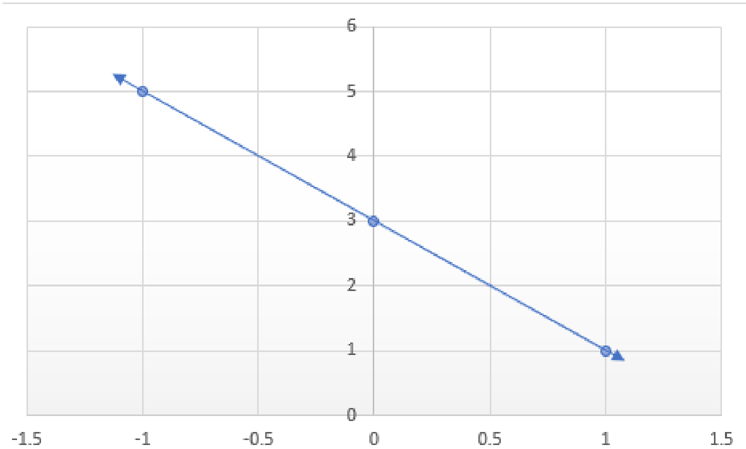
Trazar la gráfica de $\mathbf{2x + y = 3}$

Primero hay que despejar para y: $y = \ -2x + 3$ Propiedad inverso aditivo

Construir la tabla de valores asignando valores a x, evaluarlos en la ecuación y obtener los valores de y. La x es la variable independiente, por eso se le asigna cualquier valor. Como la gráfica es una recta, con dos puntos es suficiente para construir la gráfica, pero es conveniente asignar valores negativos, el cero y valores positivos.

$y = \ -2x + 3$	$y = -2x + 3$	$y = -2x + \boldsymbol{y} = \ \mathbf{-2(-1) + 3}$
$\mathbf{y = -2(0) + 3}$	$\mathbf{y = -2(1) + 3}$	
$\mathbf{y = 2 + 3}$	$\mathbf{y = 0 + 3}$	$\mathbf{y = -2 + 3}$
$\mathbf{y = 5}$	$\mathbf{y = 3}$	$\mathbf{y = 1}$

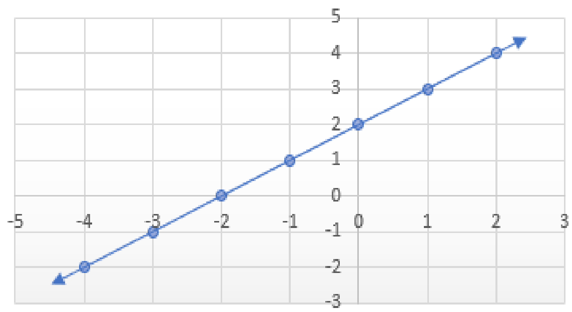
La gráfica de la ecuación $y = -2x + 3$ es la siguiente:



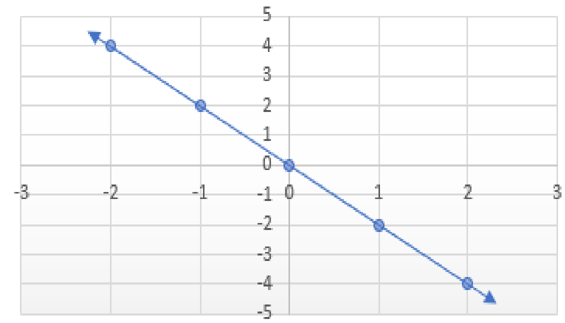
x	y
-1	**5**
0	**3**
1	**1**

Las ecuaciones lineales en dos variables poseen algunas características:

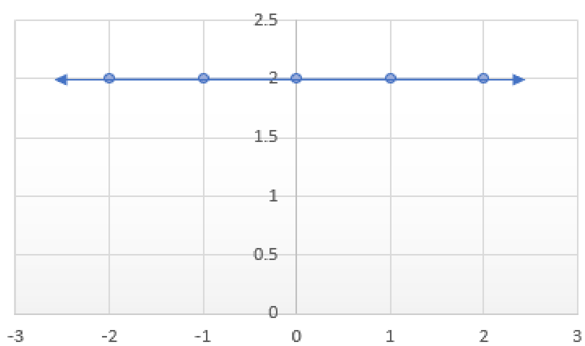
1. la gráfica es una línea recta.
2. tienen una inclinación que puede ser positiva, negativa, cero o indefinida.
3. Algunas tienen intercepto en y, otras intercepto con el eje de x y otras con ambos ejes.



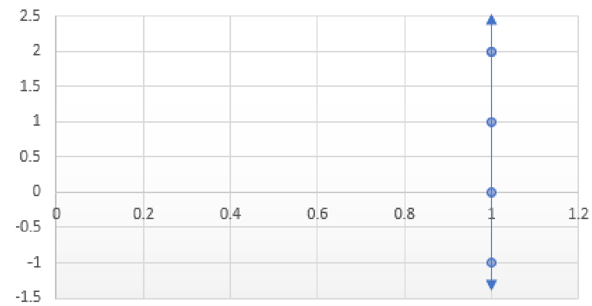
positiva



negativa



cero



indefinida

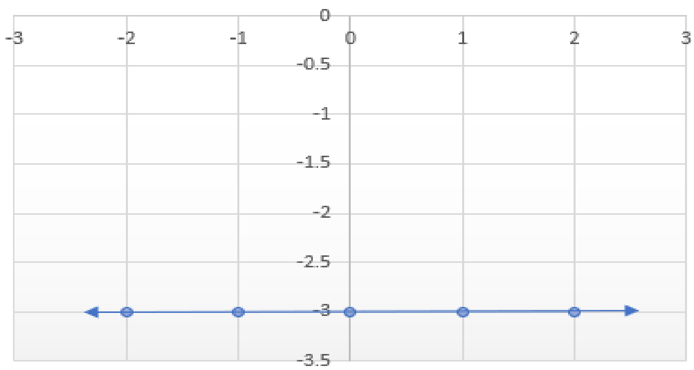
Pasos que deben seguirse en la resolución de ecuaciones

- ✓ Eliminar los denominadores de las fracciones multiplicando ambos lados de la ecuación por el denominador común.
- ✓ Simplificar cada lado de la ecuación, usando la propiedad distributiva de ser necesario para eliminar paréntesis y sumar términos semejantes.
- ✓ Colocar en un lado de la ecuación los términos que tengan la variable $\boldsymbol{y}$ y en el otro lado los términos que tengan la variable x y los números sin variable.
- ✓ Utilizar la propiedad de multiplicación o división de igualdad para que la variable tenga coeficiente igual a uno.
- ✓ Construir una tabla de valores: asignar valores a x, evaluar y obtener los valores de $\boldsymbol{y}$.

Ejemplos

1. Trazar la gráfica de la ecuación $y = -3$

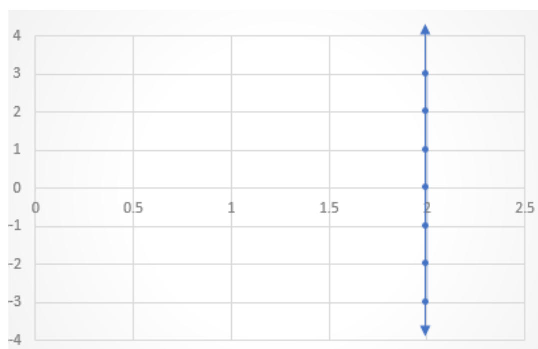
La solución de esta ecuación es el conjunto de todos los puntos del plano en los cuales el valor de $\boldsymbol{y}$ es -3 para todo valor de x. La gráfica es una recta horizontal que no interseca al eje de x, pero sí interseca al eje de y en el punto (0, -3).



2. Trazar la gráfica de la ecuación $x = 2$

Esta ecuación no tiene la variable y, la gráfica es una recta vertical que pasa por el punto (2,0). Para todo valor de y, la x es 2.

Esta ecuación no es una función porque x se repite.



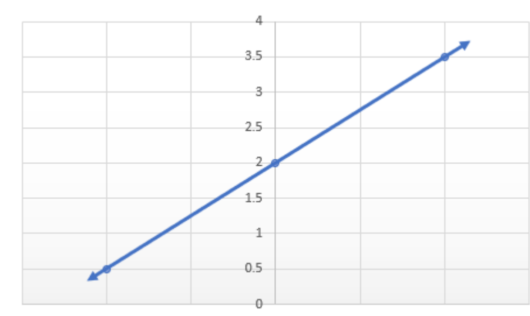
3. Trazar la gráfica de $-x + 2y = 4$

$$-x + 2y = 4$$

$$2y = x + 4$$

$$\frac{2}{2}y = \frac{x}{2} + \frac{4}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}x + 2$$



4. Graficar la ecuación $x^2 + 2x - y = 3$. Hallar los interceptos en $\underline{x}$ y $\underline{y}$.

ASSESSMENT PARA ENTREGAR: VALOR 40 PUNTOS

A. Construye tabla de valores para las siguientes ecuaciones: (10 pts)

a) y = 4x   b) x + y = -3

, luego construye la gráfica de las ecuaciones. (10pts)

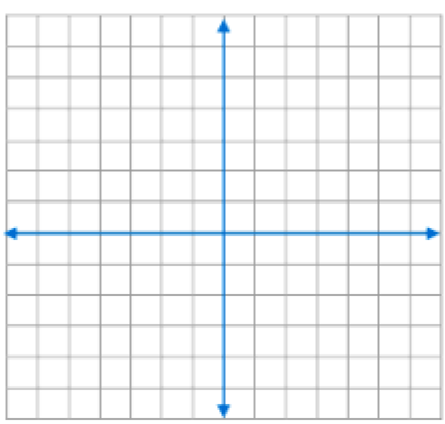
x	*y*

a) Tabla de valores

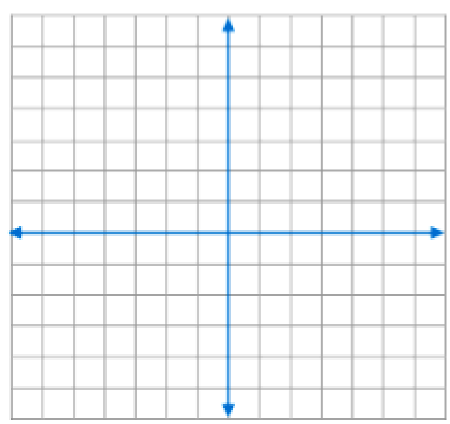
b) Tabla de valores

x	*y*

a) y = 4x



b) x + y = -3



C. Dibuja la gráfica de las siguientes ecuaciones: 20 pts

1. $y = 4x - 2$
2. $-2y = 16x + 20$
3. $y = 5$
4. $x = 1$

EVALUACIÓN

Matemáticas

Tarea de desempeño – La clase de Guitarra

Tarea de desempeño para entregar **Total 40 puntos**

La clase de Guitarra

Un maestro de guitarra da una clase de 20 semanas. La clase se reúne cada semana en un estudio de música alquilado. Suponte que:

Al maestro le cuesta *c* dólares alquilar el estudio por las 20 semanas.

• La clase contiene *n* estudiantes.

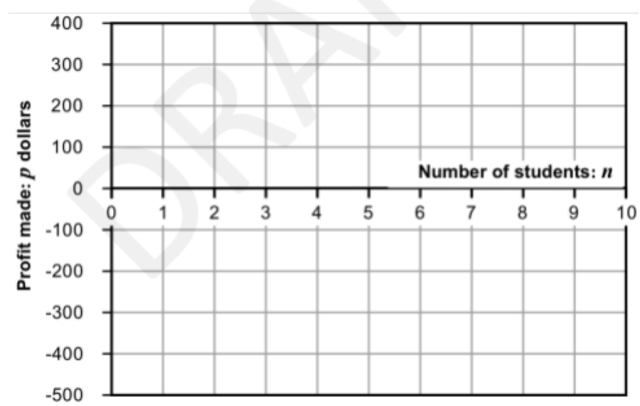
• Cada estudiante le paga al maestro un solo pago de *f* dólares por el

• El maestro gana *p* dólares al finalizar el curso.

1. Suponte que $c = 400$ y $f = 70$.

Escribe una ecuación que muestre como la ganancia hecha, p, depende de n, el número de estudiantes que asisten a la clase.

2.Grafica tu ecuación y explica el significado del punto donde el gráfico cruza el eje horizontal



1. Escribe una fórmula para calcular p cuando sabes el valor de *c, n*, y *f*

____

____

2. Escribe una fórmula para calcular cuando sabes el valor de c, n y p

____

____

Ecuaciones cuadráticas

Una ecuación cuadrática es una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ donde a, b, c son números reales, donde a ≠ 0.

Cuando hay una ecuación en la forma anterior se dice que está en la forma estándar. La forma estándar es cuando la ecuación cuadrática está despejada para cero.

Repasemos lo que te hemos compartido hasta el momento:

La ecuación cuadrática tiene tres términos:

- el término donde la variable está elevada al cuadrado (**ax^2**)
- el término donde la variable está lineal (bx)
- el término donde está la constante sola (c).

En el caso del término *bx* y del término con la constante *c*, como *b* y *c* pueden ser cero, a veces la ecuación estándar toma otras formas, por ejemplo:

$$ax^2 + c = 0 \quad \leftarrow \quad \boxed{\text{Si } b = 0, \text{ falta el término } bx.}$$

$$ax^2 + bx = 0 \quad \leftarrow \quad \boxed{\text{Si } c = 0, \text{ falta el término } c.}$$

$$ax^2 = 0 \quad \leftarrow \quad \boxed{\text{Si } b = 0 \text{ y } c = 0, \text{ faltan los términos } bx \text{ y } c.}$$

Ejemplos de ecuaciones cuadráticas en forma estándar:

$$2x^2 + 5 = 0 \quad \leftarrow \quad \boxed{\text{Falta el término } bx.}$$

$$3x^2 - 2x = 0 \quad \leftarrow \quad \boxed{\text{Falta el término } c.}$$

$$6x^2 = 0 \quad \leftarrow \quad \boxed{\text{Faltan los términos } bx \text{ y } c.}$$

$$-3x^2 + 9 = 0 \quad \leftarrow \quad \boxed{\text{Falta el término } bx.}$$

$-x^2 + 5x = 0$ ← Falta el término c.

$-6x^2 = 0$ ← Faltan los términos bx y c.

- Ejemplos de ecuaciones cuadráticas que no están en forma estándar:

$2x^2 + 1 = 8$

$5x^2 - 2x = 6$

$6x^2 = -3x + 2$

$x^2 + 5x = -6$

$-3x^2 = 9$

$-x^2 = 4x$

$-6x^2 = 2x – 8$

Observa que no están en forma estándar porque las ecuaciones no están despejadas para cero.

Se pueden colocar en forma estándar despejando para

Método de Extracción de Raíces:

Este principio establece qué hacer cuando se tiene una ecuación donde en un lado aparece la variable elevada al cuadrado y al otro lado aparee una constante donde falta el término bx.

Principio de Raíces Cuadradas
Las soluciones de la ecuación $x^2 = d$ son: $\sqrt{d}\ y -\sqrt{d}$. . -Cuando $d > 0$, las soluciones son dos números reales. -Cuando $d = 0$, la única solución es 0. -Cuando $d < 0$, las soluciones son dos números imaginarios. (d es una constante.)

Vemos en este principio que las soluciones de la ecuación serán la raíz cuadrada positiva y negativa de la constante.

Debemos despejar el término que tiene la variable elevada al cuadrado

Aplicar el Principio de las Raíces Cuadradas, esto es, extraer la raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación.

Para poder aplicar este método la ecuación cuadrática debe ser de la forma

$ax^2 + c = 0$, o sea, donde falte el término bx.

Ejemplos

1. $3x^2 = 6$

$\frac{3x^2}{3} = \frac{6}{3}$ despeja la variable elevada al cuadrado dividiendo por 3 en ambos lados de la ecuación

$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{2}$ ←

Esto significa que:
$x = \sqrt{2}$ y $x = -\sqrt{2}$

- Como 2 es positivo, al extraer la raíz se producen dos soluciones que son números reales: $\sqrt{2}\ y - \sqrt{2}$

2. $-5x^2 + 2 = 0$
   Primero, se despeja la variable elevada al cuadrado:
   Segundo, se extrae la raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación.
   $-5x^2 + 2 =$

$\frac{-5x^2}{-5} = \frac{-2}{-5}$

$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{\frac{2}{5}}$

$\sqrt{\frac{2}{5}}$ y $-\sqrt{\frac{2}{5}}$

- Racionalizando el denominador se obtiene:

$$x = \sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5} \qquad x = \sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{10}}{5}$$

Soluciones: $\frac{\sqrt{10}}{5}$ **y** $-\frac{\sqrt{10}}{5}$

3. $(x – 2)^2 = 7$

Como el término que está elevado al cuadrado está despejado, se extrae la raíz cuadrada en ambos lados:

$$(x-2)^2 = 7$$

$$\sqrt{(x-2)^2} = \pm\sqrt{7}$$ **Simplifica**

$$x-2 = \pm\sqrt{7}$$ **Despeja para x**

$$x = 2 \pm \sqrt{7}$$

Soluciones:

$2+\sqrt{7}$ **y** $2-\sqrt{7}$

4. $X^2 + 6x + 9 = 2$ trinomio cuadrado perfecto

$$(x+3)^2 = 2$$ se factoriza el polinomio:

Cuando el término que está elevado al cuadrado está despejado, se extrae la raíz cuadrada en ambos lados:

$$\sqrt{(x+3)^2} = \pm\sqrt{2}$$

$$x + 3 = \pm\sqrt{2}$$

$$x = -3 \pm \sqrt{2}$$

Soluciones: $-3 + \sqrt{2}$ y $-3 - \sqrt{2}$

Hay ecuaciones que, aunque no tienen las características anteriores, se pueden transformar en trinomios cuadrados perfectos para luego poder aplicar el Método de Extracción de Raíces.

Ahora es tu turno!

Resuelve por el método de extracción de raíces

$$2x^2 - 3 = 0$$

$$(x+2)^2 = 49$$

$$(x-11)^2 = 7$$

$$(x-4)^2 = 16$$

Método de Completar el Cuadrado

Ejemplos:

1. $X^2 - 6x + 8 = 0$

- Primero, se asegura que *a* sea igual a 1 en el término donde está la variable elevada a cuadrado. En el ejemplo anterior *a* = 1. Si no fuera 1, se divide cada término de la ecuación por el coeficiente numérico *a* correspondiente.
- Segundo, se mueve el término constante c al otro lado de la ecuación: $X^2 - 6x = -8$.
- Tercero, se suma en ambos lados de la ecuación un número que haga que la expresión en el lado izquierdo se convierta en un trinomio cuadrado perfecto.

  Este número será siempre la mitad del término *b*, elevada al cuadrado $\left(\frac{b}{2}\right)^2$

$$x^2 - 6x = -8$$

$$x^2 - 6x + -3^2 = -8 + -3^2$$

$$\boxed{\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{-6}{2}\right)^2 = (-3)^2}$$

$$x^2 - 6x + -3^2 = -8 + -3^2$$

$$x^2 - 6x + 9 = -8 + 9$$

Ahora, se convirtió el lado izquierdo en un trinomio cuadrado perfecto por lo que se puede factorizar.:

$(x-3)\ (x-3) = -8+9$ Factoriza

$$(x-3)^2 = -8 + 9$$

$$(x-3)^2 = 1$$

$\sqrt{(x-3)^2} = \pm\sqrt{1}$ Método de extracción de raíces

$x - 3 = \pm 1$

$x = 3 \pm 1$

$3 + 1 = 4$

$3 - 1 = 2 =$

Ahora es tu turno

Resuelve por el Método de completar al cuadrado

$$x^2 + 4x = 2$$

$$x^2 - 22x = 11$$

$$x^2 + x = 1$$

$$x^2 - 5x = 7$$

$$x^2 + 6x - 16 = 0$$

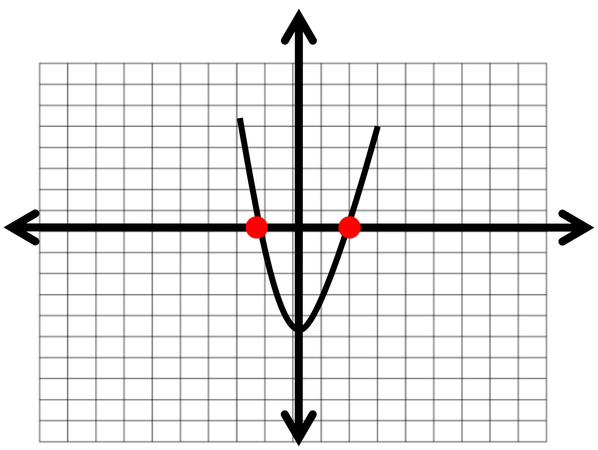
$$x^2 - 10x - 4 = 0$$

Gráfica de una ecuación cuadrática

1. Las gráficas a menudo pueden intersecar el *eje de x*.
2. Una intersección <u>x</u> se conoce como un cero de la gráfica de una ecuación. La coordenada de un intercepto en x es siempre de la forma siguiente:

(x, 0)

En el siguiente ejercicio, los puntos A y B son interceptos en x. Observe que las coordenadas de los puntos A y B son: A = (-1, 0) y B = (2, 0)

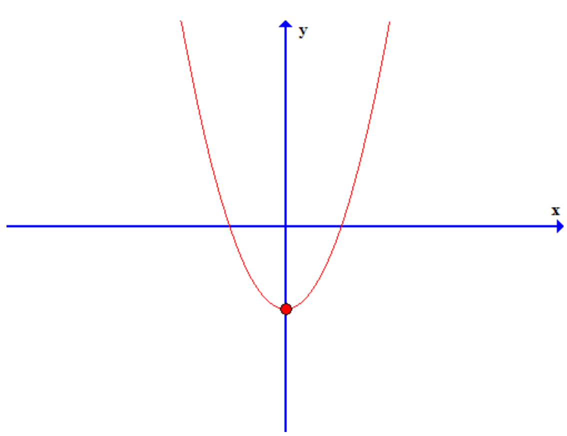


Los puntos rojos, son los interceptos en *x*

3. Intercepto en eje de *y*

Las coordenadas (x, y) de los puntos que son interceptos en y tienen siempre un cero en el eje de x,

(0,y)



Hallar los interceptos en *x* y *y*

Graficar la ecuación $x^2 + 2x - y = 3$. Hallar los **interceptos en <u>*x*</u>**

Primero debemos despejar la ecuación para la variable y. Como resultado obtenemos:

$y = x^2 + 2x - 3$. Luego buscamos el ***intercepto en y*****,** evaluando f (0) en la ecuación

$y = x^2 + 2x - 3$. Al resolver $y = (0)^2 + 2(0) - 3 = -3$; por lo tanto el intercepto en y es (0, -3). Para hallar el ***intercepto en x***, sustituimos el 0 en la variable *y* de la ecuación

$y = x^2 + 2x - 3$. Al resolver $0 = x^2 + 2x - 3$, por el método de factorización obtenemos

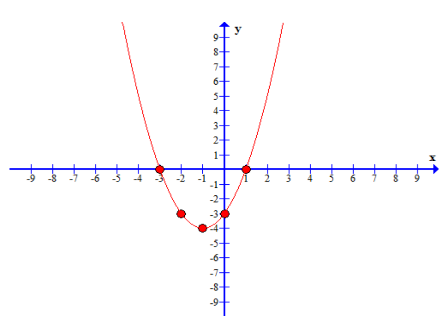
$$(x-1)(x+3) = 0$$

X = 1 x = -3.

Los interceptos en x son (1, 0) y (-3,0). Luego hallamos varios pares ordenados (x, y) que satisfagan la ecuación y completamos una tabla de valores.

x (entrada)	$y = x^2 + 2x - 3$ (ecuación)	y (salida)	(x,y) (Par ordenado)
-3	$y = (-3)^2 + 2(-3) - 3$	0	(-3, 0)
-2	$y = (-2)^2 + 2(-2) - 3$	-3	(-2, -3)
-1	$y = (-1)^2 + 2(-1) - 3$	-4	(-1, -4)
0	$y = (0)^2 + 2(0) - 3$	-3	(0, -3)
1	$y = (1)^2 + 2(1) - 3$	0	(1, 0)

A continuación, se grafican los puntos obtenidos, que aparecen recogidos en la tabla de valores.



Ejemplo

Resuelve la Ecuación $x^2 + x + 1 = 0$

- Se resuelve la ecuación aplicando la fórmula cuadrática.
- En este ejemplo la ecuación ya está en forma estándar:

$x^2 + x + 1 = 0$

- Después que la ecuación está en forma estándar, se determinan los valores de a, b y c. En este ejemplo:

a = 1, b = 1, y c = 1

- Ahora se puede aplicar la fórmula.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

Es tu turno

Resuelve aplicando la fórmula cuadrática

1. $x^2 + 8x + 2 = 0$

2. $3x^2 = -8x - 1$

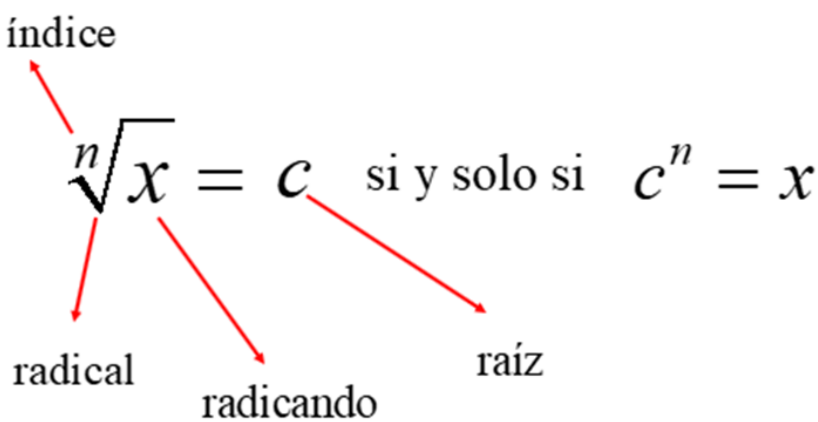
3. $x^2 + 3x = 2x$

4. $x^2 + 3x = 8$

Ecuaciones con radicales

Ecuación radical

Una ecuación que contiene una expresión radical se llama ecuación radical



Resolver ecuaciones radicales

Para resolver ecuaciones radicales se requiere:

- aplicar las reglas de los exponentes.
- seguir algunos principios algebraicos básicos. En algunos casos, también requiere buscar errores generados por elevar a una potencia par cantidades desconocidas.
- como Una estrategia básica para resolver ecuaciones radicales es despejar primero el término racional y luego elevar a una potencia ambos lados de la ecuación para eliminar el radical. (La razón por la que usamos potencias será más clara en un momento) Este es la misma estrategia que usaste para resolver

ecuaciones sin radicales; reordenar la expresión para despejar la variable que quieres conocer y luego resolver la ecuación resultante.

Debes tener en cuenta lo siguiente, todo número positivo tiene dos raíces cuadradas, *una raíz cuadrada positiva* o principal y *una raíz cuadrada negativa*.
Para cualquier número positivo x, escribimos la raíz cuadrada positiva como $\sqrt{x}$ y la raíz cuadrada negativa como $-\sqrt{x}$

Hay dos ideas claves que usarás para resolver ecuaciones radicales, la primera es que si, entonces. (Esta propiedad te permite elevar al cuadrado ambos lados de una ecuación y estar seguro que los dos lados siguen siendo iguales.) La segunda es que si una raíz cuadrada de un número no negativo x se eleva al cuadrado, entonces obtienes x: (Esta propiedad te permite "eliminar" los radicales de tus ecuaciones.)

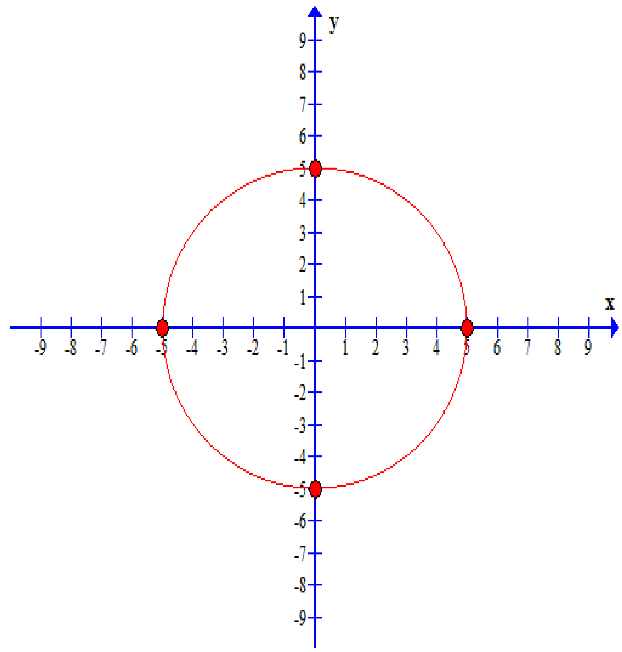
Empecemos con una ecuación radical que puedes resolver en pocos pasos

Dibuja la gráfica de $x^2 + y^2 = 25$

Primero despejamos la ecuación para la variable *y*, quedando así $y^2 = 25 - x^2$. Luego extraemos raíz cuadrada a ambos lados de la ecuación. La ecuación resultante es $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$. Luego evaluamos la ecuación para diferentes valores de x, tomando en cuenta los signos.

x (entrada)	$y = \pm\sqrt{25 - x^2}$ (ecuación)	y (salida)	(x,y) (Par ordenado)
-5	$y = \pm\sqrt{25 - (-5)^2}$	± 0	(-5, 0)
0	$y = \pm\sqrt{25 - (0)^2}$	± 5	(0, 5) y (0, -5)
5	$y = \pm\sqrt{25 - (5)^2}$	± 0	(5, 0)

Luego de trabajar la tabla de valores, localizamos los puntos obtenidos para graficar.



Resolver:

1) $\left|\frac{2x}{3}+10\right|=0$

2) $\left|\frac{x}{2}+2\right|=7x-5$

3) $\left|9x+\frac{1}{3}\right|=|x-3|$

Soluciones:

1) $x=-15$

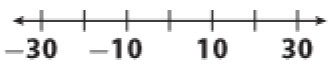
2) $x=1\frac{1}{13},\frac{2}{5}$

3) $x=-\frac{5}{12},\frac{4}{15}$

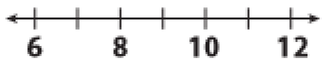
Evaluación **Valor: 25 puntos**

A. Resuelve la desigualdad y representa gráficamente la desigualdad. (Valor 9puntos)

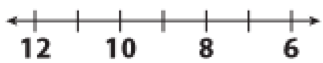
1. $-20x \geq -400$



2. $3(10 + 2m) \leq 96$



3. $7 - 6x < 2x + 89$



B. Haz una tabla de entradas y salidas para la inecuación $y < 4a$ usando los valores de a: 0,1,2 y 3. (8 puntos)

C. Resuelve la desigualdad lineal $4x + 5 \geq 9$, escribe la solución en notación de intervalo y después haz un gráfico de la solución. (4 puntos)

D. Haz lo mismo para la desigualdad $4x + 5 < 9$ y compara los gráficos y representa gráficamente las desigualdades. (4 puntos)

Evaluación:

Es tu turno

Construye la gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones en el mismo plano e identifícalas con colores diferentes. (Valor 30 puntos)

a) $y = x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

b) $y = x^2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

c) $y = x^3$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

d) $y = \pm\sqrt{x}$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

e) $y = |x|$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

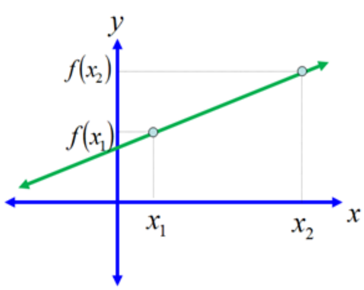
Unidad 2 Funciones lineales y ecuaciones

Lección 1. Identificar la ecuación de una línea entre dos puntos dados.

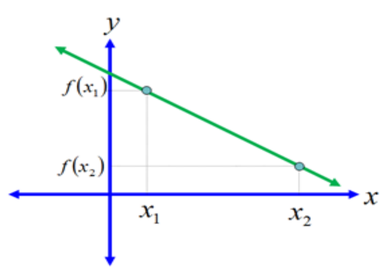
Las funciones con una razón de cambio constante se llaman ***funciones lineales***. Estas se representan gráficamente con una recta. Entre sus diversas aplicaciones pueden ser utilizadas para calcular o predecir las ventas de una compañía.

Para poder analizarlas necesitamos saber su razón de cambio también conocida como ***pendiente***. La cuál es comúnmente representada con la letra ***m***. Esta establece una relación proporcional entre la variable dependiente (***y***) o *elevación*, y la variable independiente (***x***) o *desplazamiento*.

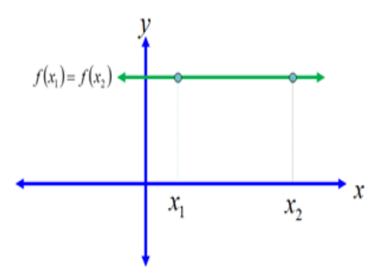
La pendiente de una recta puede ser *positiva*, *negativa* o *constante* (cero) (*figuras 1-3*).



Función Lineal Creciente
Pendiente Positiva (+)
Figura 1

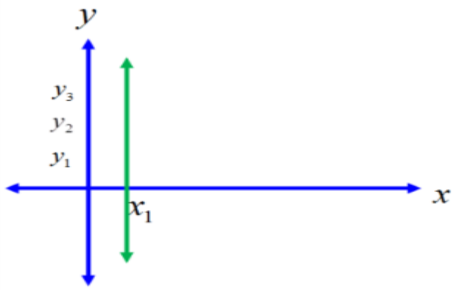


Función Lineal Decreciente
Pendiente Negativa (-)
Figura 2



Función Lineal Constante
Pendiente Cero (0)
Figura 3

En el caso que no sea ninguna de las anteriores decimos que la pendiente no está definida, la recta no sería una función (figura 4).

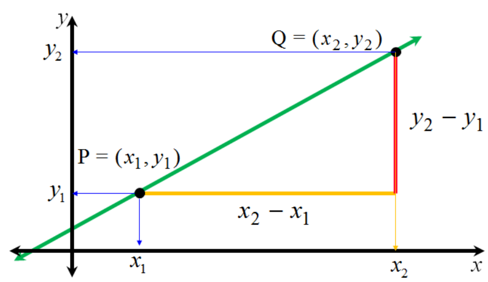


Recta que NO representa una función
Pendiente no definida
Figura 4

Fórmula de la pendiente

Sean $P=(x_1,y_1)$ y $Q=(x_2,y_2)$ dos puntos distintos con $x_1 \neq x_2$. La pendiente está dada por la fórmula:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \qquad x_1 \neq x_2$$



Ejemplo:

Encuentra la pendiente de la función lineal que pasa por los puntos **A** *(-7,8)* y

B *(3, -2)*.

✓ Sustituyes los valores de las coordenadas y simplificas.

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \qquad m=\frac{-2-8}{3-(-7)}=\frac{-10}{10}=-1$$

La pendiente es -1, por lo tanto, es una función lineal decreciente.

La *función lineal* está definida por ecuaciones de las siguientes formas:

Forma	Ejemplo
Pendiente-Intercepto • Para utilizar esta forma se necesita la pendiente (*m*) y el intercepto en el eje de y (*b*). $\boldsymbol{y = mx + b}$	Halla la ecuación de la función lineal donde el intercepto en el eje de y es el punto (0, 2) y la pendiente es 2. $\boldsymbol{y = mx + b}$ $\boldsymbol{y = 2x + 2}$
Punto-Pendiente • Para utilizar esta forma se necesita la pendiente (*m*) y un punto $\boldsymbol{P_1(x_1, y_1)}$ de la función. $\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1)}$	Halla la ecuación de la función lineal con pendiente $\frac{-1}{2}$ y el punto (-1, 4) contenido en ella. $\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1)}$ $\boldsymbol{y - (4) = \frac{-1}{2}(x - (-1))}$ $\boldsymbol{y - 4} = \frac{-1}{2}(\boldsymbol{x + 1})$ $\boldsymbol{y - 4} = \frac{-1}{2}\boldsymbol{x} - \frac{1}{2}$ $\boldsymbol{y} = \frac{-1}{2}\boldsymbol{x} - \frac{1}{2} + 4$ $\boldsymbol{y} = \frac{-1}{2}\boldsymbol{x} + \frac{7}{2}$
Dos Puntos • Para utilizar esta forma se necesitan dos puntos $\boldsymbol{P_1(x_1, y_1)}$, $\boldsymbol{P_2(x_2, y_2)}$ de la función. $\boldsymbol{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)}$	Halla la ecuación de la función lineal con que pasa por P_1(-3, 2) y P_2(-4,4). $\boldsymbol{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)}$ $\boldsymbol{y - 2} = \frac{4 - 2}{-4 - (-3)}\boldsymbol{(x - (-3))}$ $\boldsymbol{y - 2} = -2(\boldsymbol{x + 3})$ $\boldsymbol{y - 2} = -2\boldsymbol{x} - 6$ $\boldsymbol{y} = -2\boldsymbol{x} - \boldsymbol{4}$

Práctica

Determina las siguientes ecuaciones de recta

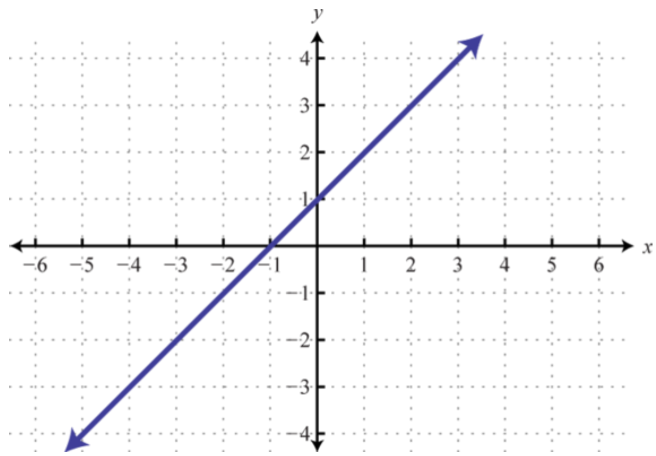
1. Pasa por el punto (0, -3) y tiene pendiente *m=3*.

2. Pasa por los puntos (0, -8) y (10,0).

3. Pasa por los puntos (4, 5) y (2,-1).

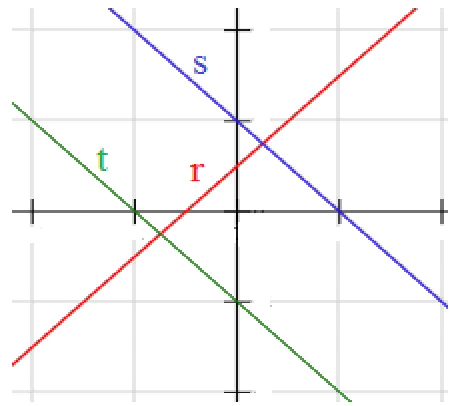
4. Intercepta el eje de *y* en el punto (0,8) y pasa por el punto (1,4).

5. De la gráfica a continuación



Lección 2. Rectas Paralelas y Perpendiculares

Las rectas no verticales en un mismo plano se pueden relacionar entre sí. Repasemos los conceptos de paralelas y perpendiculares.



Rectas paralelas **t ‖ s**

- aquellas que nunca se intersecan, por lo tanto, no tienen ningún punto en común.

Rectas perpendiculares **t ⊥ r**

- las que al interceptarse forman ángulos de 90̊.

Para determinar si dos rectas no verticales en un plano son paralelas, perpendiculares o ninguna se puede utilizar la *pendiente* de ambas.

Rectas Paralelas	pendientes son iguales	$\boldsymbol{m_1 = m_2}$
Rectas Perpendiculares	pendientes recíprocas negativas	$\boldsymbol{m_1 = -\frac{1}{m_2}}$

Ejemplo

- ¿La recta correspondiente a la ecuación $\boldsymbol{y = -3x + 4}$ es paralela o perpendicular a la recta $\boldsymbol{y = \frac{x}{3} - 1}$?

Solución:

Estas ecuaciones están escritas en forma pendiente–intercepto $\boldsymbol{y = mx + b}$, por lo tanto, las pendientes de ellas son -3 y $\frac{1}{3}$ respectivamente.

a) Para verificar si estas dos ecuaciones son paralelas las pendientes deben ser las mismas. Vemos que en este caso no lo son -3 y $\frac{1}{3}$ (*pendientes no iguales*). Por lo tanto, estas ecuaciones **no** son *paralelas*.

b) Para verificar si estas dos ecuaciones son perpendiculares las pendientes deben ser recíprocas con el signo opuesto. Vemos que en este caso -3 y $\frac{1}{3}$ **sí** lo son, debido a que si las multiplicamos el resultado es -1. Por lo tanto, estas ecuaciones son *perpendiculares*.

Ejemplo

- Determina cualquier relación que exista entre las rectas.

a) $y = \frac{3}{2}x$

b) $y = \frac{-3}{2}x + 3$

c) $y = \frac{2}{3}x + 1$

Solución

- La recta **a** tiene pendiente $m=\frac{3}{2}$, la **b** $m=-\frac{3}{2}$ y la **c** $m=\frac{2}{3}$.
- Ninguna de las rectas tienen la misma pendiente por lo tanto no son paralelas.
- Sin embargo la recta **b** y **c** tienen pendientes recíprocas opuestas (al multiplicarlas el resultado es -1) por lo tanto son rectas perpendiculares.

Conociendo que las rectas paralelas tienen la misma pendiente y que las perpendiculares tienen pendiente recíproca opuesta puedes hallar tanto la recta perpendicular como la recta paralela de una recta dada.

Ejemplo

La trayectoria de una tormenta $\boldsymbol{\beta}$, que surge de África, cruza el norte del Caribe y culmina su tiempo de vida en los Estados Unidos, está modelada por la recta $\boldsymbol{y = -\frac{5}{4}x - 75}$.

Halla la ecuación que representa la línea de una posible trayectoria paralela a la tormenta $\boldsymbol{\beta}$, que pase por Puerto Rico. Utiliza las coordenadas (66,18) como punto de referencia de la localización de la isla.

Solución

- Ya que $y = -\frac{5}{4}x - 7$, la pendiente es $-\frac{5}{4}$. La recta paralela tendrá la misma pendiente.
- Utiliza la forma punto-pendiente para escribir la ecuación que pasa por el punto (66,18)
- $\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1)}$ *Forma punto-pendiente*

$\boldsymbol{y - 18 = -\frac{5}{4}(x - 66)}$ *Sustituye la pendiente y el punto*

$y - 18 = -\frac{5}{4}x + 82.5$ *Despeja para y*

$y = -\frac{5}{4}x + 100.5$ *Ecuación de la recta paralela*

Si quisiera hallar la ecuación que representa la línea de una posible trayectoria perpendicular a la tormenta $\boldsymbol{\beta}$**,** que también pase por Puerto Rico el proceso sería el siguiente.

- Ya que $y = -\frac{5}{4}x - 7$, la pendiente es $-\frac{5}{4}$. La recta perpendicular tendrá la pendiente recíproca opuesta. Por lo tanto $\mathbf{m} = \frac{4}{5}$
- Utiliza la forma punto-pendiente para escribir la ecuación que pasa por el punto (66,18)
- $\mathbf{y - y_1 = m(x - x_1)}$ Forma punto-pendiente

$\mathbf{y - 18 = \frac{4}{5}(x - 66)}$ Sustituye la pendiente y el punto

$y - 18 = \frac{4}{5}x - 52.8$ Despeja para y

$y = \frac{4}{5}x - 70.8$ Ecuación de la recta perpendicular

Ejercicios de Práctica

A. Escribe la ecuación de la recta que pasa por los siguientes puntos. Identifica la ecuación de una recta que sea paralela y una perpendicular a la misma.

1. (3, -4) y (4, -3)

2. (3, 0) y (14, 0)

3. (5, 5) y (-5, -5)

4. (1, 4) y (1, 10)

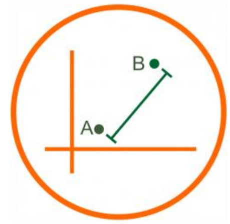
5. (9, 6) y (7, 6)

B. Determina la pendiente de:

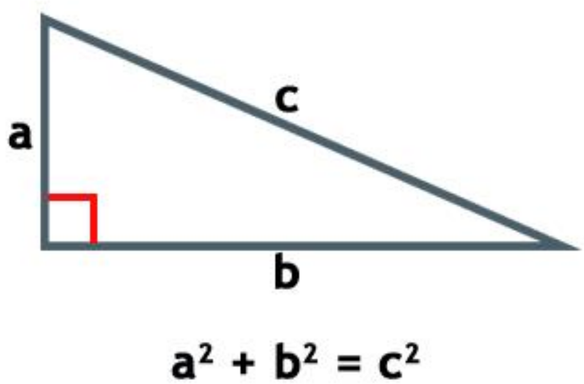
1. La recta que es paralela a la recta que pasa por (6, 2) y (3, 4).

2. La recta que es perpendicular a la recta que pasa por (-4, 5) y (3, -8)

C. Determina el valor de y si la recta pasa por los puntos (3, y) y (6, 8), y tiene pendiente igual a 2.

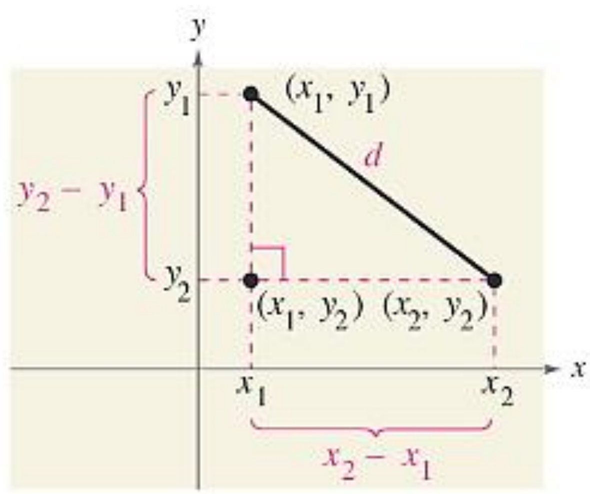


Lección 3. Distancia y Punto Medio



Recuerda el **Teorema de Pitágoras** el cual establece que para un triángulo rectángulo al sumar el cuadrado de los ***catetos*** (lados que forman el ángulo recto) resulta en el cuadrado de la ***hipotenusa*** (lado opuesto al ángulo recto). Este teorema nos lleva a la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos en el plano cartesiano.

Observa en la figura que con la distancia *d* entre dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) se puede formar un triángulo rectángulo. Siendo *d* la *hipotenusa*, el lado horizontal $|x_2 - x_1|$ y el vertical $|y_2 - y_1|$ los *catetos*. Aplicando el *Teorema de Pitágoras* obtenemos que



$d^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$ *Hallar la raíz cuadrada*

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ **Fórmula Distancia**

Ejemplos

Sea $P_1(-7,8)$ y $P_2(3,-2)$ halla la distancia entre los puntos.

Solución

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$ *Fórmula Distancia*

$$d = \sqrt{(3 - (-7))^2 + ((-2) - 8)^2}$$ *Sustituye los valores de las coordenadas*

$$d = \sqrt{(10)^2 + (-10)^2}$$ *Resuelve*

$$d = \sqrt{100 + 100}$$

$$d = \sqrt{200}$$

$$d \approx 14.1$$

Punto Medio

Cada persona tiene su propio punto de vista. En ocasiones para tomar las mejores decisiones se llegan a unos acuerdos entre las personas involucradas en una situación. Existe una expresión común para eso, "lleguemos a un punto medio".

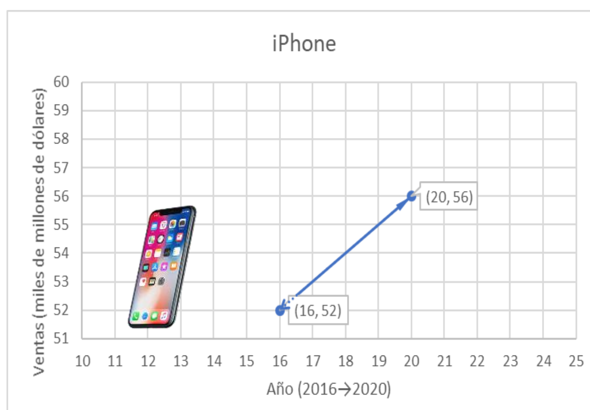
En matemática podemos encontrar el ***punto medio*** entre dos puntos si hallamos el promedio de sus coordenadas.

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

FÓRMULA PUNTO MEDIO

Ejemplo

Las ventas de Apple en celulares iPhone para el primer trimestre del año fueron aproximadamente \$52 mil millones en el 2016 y \$56 mil millones en el 2020. Indica que año representa la mitad de este periodo y las ventas aproximadas para ese año.



Solución

Utiliza la Fórmula Punto Medio → $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

Sustituye las coordenadas → $\left(\frac{16+20}{2}, \frac{52+56}{2}\right)$

$P_1(16,52)$ y $P_2(20,56)$

Resuelve → $\left(\frac{36}{2}, \frac{108}{2}\right)$

Simplifica → $(18,54)$

- Según la coordenada obtenida del punto medio, las ventas aproximadas para la mitad del periodo serán de 54 mil millones de dólares en el año 2018.

Ejercicios de Práctica

A. Halla la distancia y el punto medio entre los puntos.

1. A(-8, -2) y B(-4, 3)

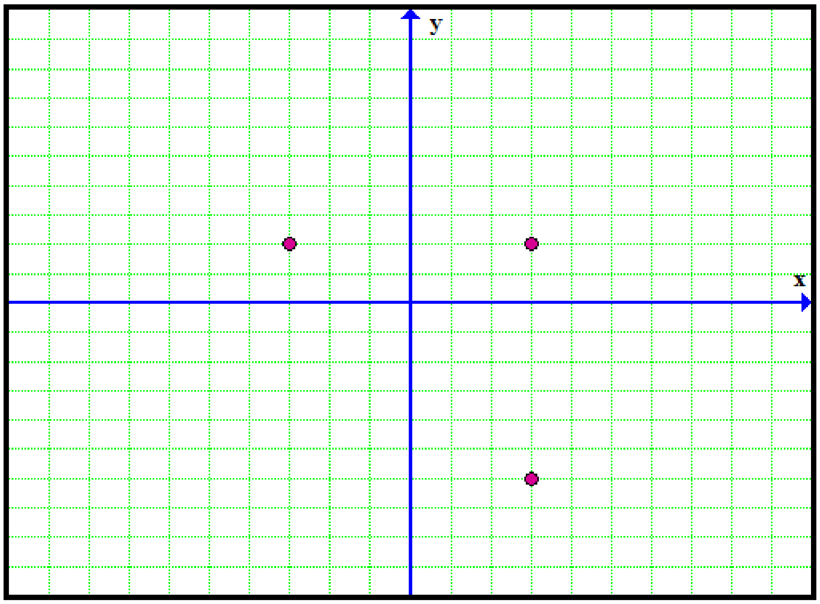
2. C(7, -3) y D(3,-3)

3. E(4, -3) y F(6, 2)

4. G(6, 2) y H(6, -2).

B. Resuelve

1. Demuestra que el triángulo con vértices A, B y C es un triángulo rectángulo. Luego halla el perímetro del ΔABC.



2. La tabla adjunta muestra la población de Puerto Rico en millones por varios años. Usa la fórmula de punto medio para calcular el número aproximado de la población en el año 2017.

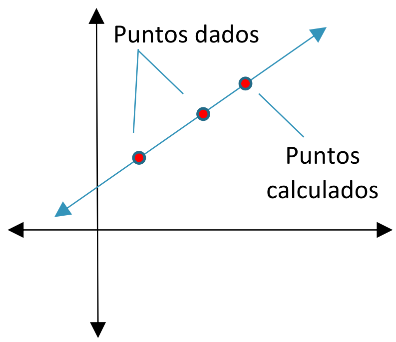
Año	**2010**	**2012**	**2014**	**2016**	**2018**
Población en Puerto Rico (millones)	3,707	3,677	3,548	3,411	3, 325

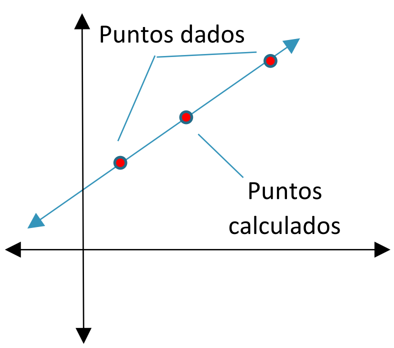
Lección 4. Aplicaciones de la función lineal

Las funciones lineales y sus ecuaciones son útiles para resolver problemas en el mundo real. Entre ellos está la predicción de ventas. Podemos ver el comportamiento de las ventas de un producto determinado para pronosticar las ventas futuras lo que aportaría en la toma de decisiones en beneficio de una compañía.

Extrapolación Lineal

Puede ayudarnos a estimar valores que están fuera del rango de nuestro grupo de datos ya que un punto extrapolado *no* se encuentra entre los puntos dados.





Interpolación Lineal

Puede ayudarnos a estimar valores que caen en medio de los datos ya que un punto interpolado se encuentra entre los puntos dados.

Tanto para la extrapolación como para la interpolación lineal debemos usar la misma estrategia:

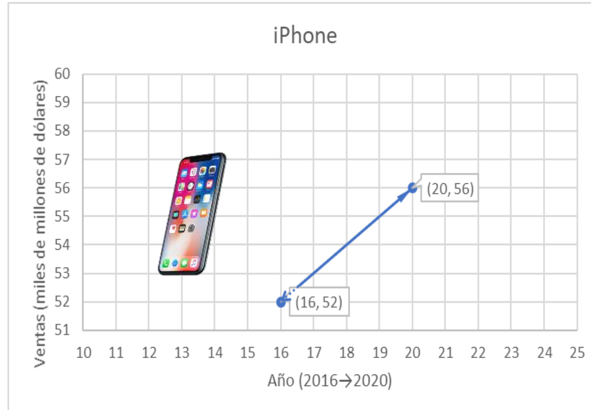
Hallar la ecuación

- Estimar el punto extrapolado
- Calcular el punto interpolado

Hallar la ecuación de la recta que conecta los dos puntos dados y resolver.

Ejemplo:

Recordando que las ventas de Apple en celulares iPhone para el primer trimestre del año fueron aproximadamente $52 mil millones en el 2016 y $56 mil millones en el 2020. Utilizando únicamente esta información escribe una ecuación que dé las ventas (en miles de millones de dólares) en términos del primer trimestre del año. Luego predice las ventas para el 2024.



Solución:

a) Los valores dados están representados por los puntos (16, 52) y (20, 56). La pendiente de la recta por la que pasan estos puntos es $\boldsymbol{m} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$\boldsymbol{m} = \frac{56-52}{20-16} = \frac{4}{4} = 1$$

b) Al utilizar la forma *punto-pendiente* se encuentra la ecuación que representa las ventas (***y***) y el año (***x***).

$$\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

$$\boldsymbol{y - 52 = 1(x - 16)} \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{y - 52 = x - 16} \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{y = x + 36}$$

Ecuación

c) De acuerdo con la ecuación $\boldsymbol{y = x + 36}$ se estiman las ventas para el año 2024.

$$\boldsymbol{y = (24) + 36} \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{y = \$60}$$

(en miles de millones)

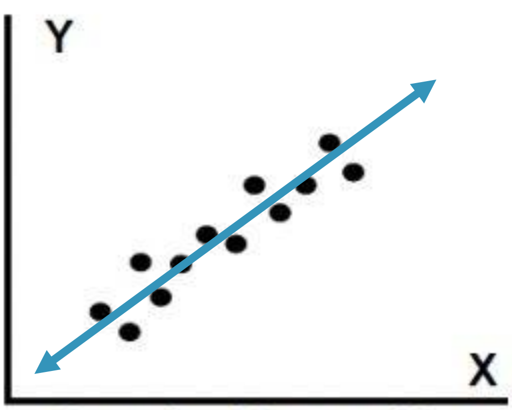
Lección 5. Ajuste Lineal

Debemos de tomar en cuenta que hacer un pronóstico dentro del rango de datos (*interpolación*) y hacerlo fuera del rango de datos (*extrapolación*), es una suposición y puede ser incorrecta. Al tener una variedad de datos es preferible obtener la recta de mejor ajuste o recta de regresión.

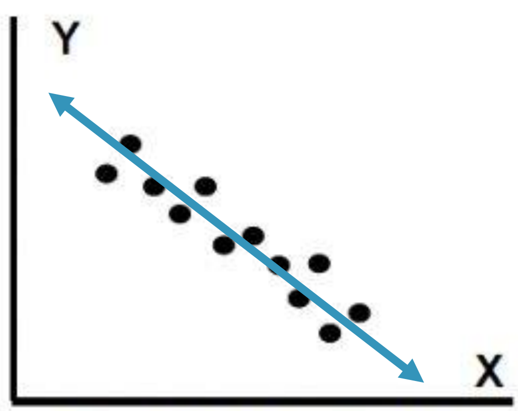
El **diagrama de dispersión** se utiliza para examinar las posibles relaciones entre dos variables numéricas, una variable se coloca en el eje horizontal (x) y la otra en el eje vertical (y). Con base en el comportamiento que toman las variables de estudio, podemos encontrar 3 tipos de correlación: ***positiva***, ***negativa*** y ***nula***.

¿Cómo determinar que dos variables se relacionan y cómo es la relación?

- Dibujar el eje de $\boldsymbol{x}$ y el eje de $\boldsymbol{y}$ en un plano rectangular (sólo usar las partes positivas).
- Trazar los puntos representados por los pares ordenados $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.
- Trazar una recta que pase por la mayoría de los puntos (si aplica).



Correlación positiva



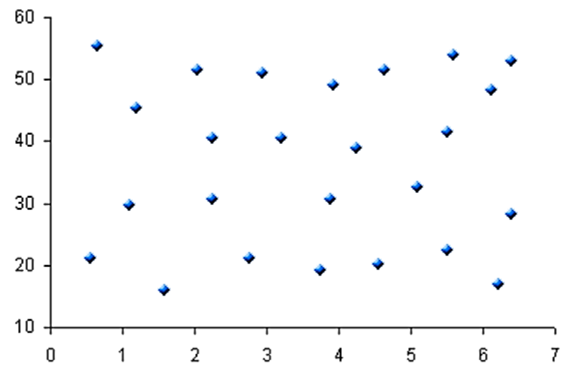
Correlación negativa

*Si la recta es creciente significa que mientras la variable **x** aumenta, también la variable **y**.*

*Si la recta es decreciente significa que mientras la variable **x** aumenta la variable **y** disminuye.*

Correlación Nula

No se muestra una correlación entre los datos.

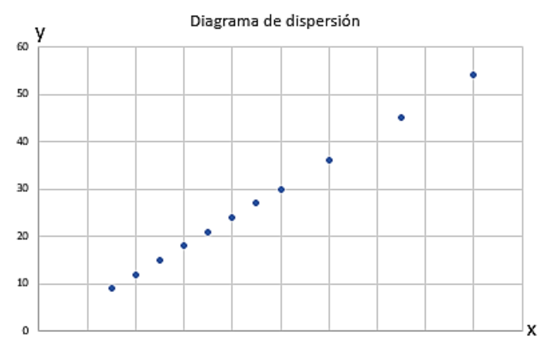


Ejemplo

El siguiente es un conjunto de datos tomados de una muestra de $\boldsymbol{n} = \mathbf{11}$ artículos.

$\boldsymbol{x}$	7	5	8	3	6	10	12	4	9	15	18
$\boldsymbol{y}$	21	15	24	9	18	30	36	12	27	45	54

a. Tracemos un diagrama de dispersión



b. ¿Existe una relación entre $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$?

Parece que existe una relación positiva muy alta entre ambas variables. Si trazamos una línea por los puntos podríamos dibujar una recta casi perfecta. Los datos en un diagrama de dispersión no siempre muestran una relación lineal exacta. Cuando los datos en un diagrama de dispersión muestran aproximadamente una relación lineal, podemos representar los datos con una ***línea de ajuste***.

LÍNEA DE AJUSTE

Línea recta que es la mejor aproximación al conjunto de datos dados. Al minimizar la distancia entre los puntos del diagrama y la recta se considera de **mejor ajuste**.

¿Cómo encontrar la línea de ajuste?

Paso 1
- Crear un diagrama de dispersión de los datos.

Paso 2
- Dibujar una línea que parece seguir de más cerca la tendencia dada por los puntos de datos. Debería haber tantos puntos por encima de la línea como por debajo de ella.

Paso 3
- Elegir dos puntos de la línea y calcular las coordenadas de cada punto. Estos puntos no tienen que ser puntos de datos originales.

Paso 4
- Escribir una ecuación de la línea que pasa a través de los puntos del paso 3. Esta ecuación es una representación de los datos.

Ejemplo

La tabla muestra las longitudes y altura (en centímetros) del fémur de varias personas. ¿Los datos muestran una relación lineal? Si es así, vamos a escribir una ecuación de la línea de ajuste y la usaremos para calcular la altura de una persona cuyo fémur tiene 35 centímetros de largo.

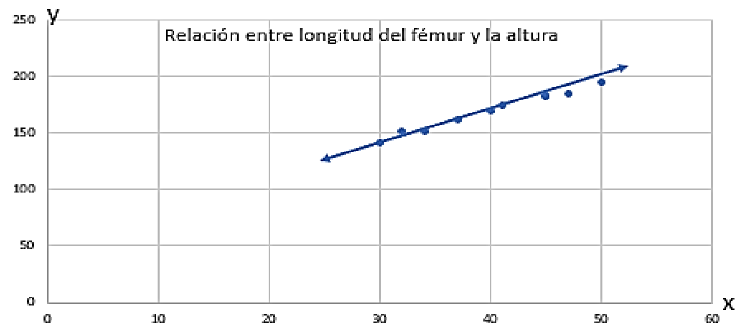
Longitud del fémur (x)	40	45	32	50	37	41	30	34	47	45
Altura (y)	170	183	151	195	162	174	141	151	185	182

Paso 1

Diagrama de dispersión

Paso 2

Trazar línea de ajuste



Paso 3 Dos puntos: $(30, 141)$ y $(42, 177)$

Paso 4 Escribir la ecuación de la recta.

Para esto, hay que buscar la pendiente ($\boldsymbol{m}$) y sustituir uno de los puntos en $\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1)}$.

$$\boldsymbol{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

$$m = \frac{177-141}{42-30}$$

$$m = \frac{36}{12}$$

$$m = 3$$

$y - y_1 = m(x - x_1)$. se utilizó (30,141)

$$y - 141 = 3(x - 30)$$

$$y - 141 = 3x - 90$$

$$y = 3x - 90 + 141$$

$$\boldsymbol{y = 3x + 51}$$

Ahora bien, la **línea de mejor ajuste** o **línea de regresión** es la línea que pertenece, tan cerca como sea posible, a todos los puntos de datos. Muchas herramientas tecnológicas tienen una función de regresión lineal que se puede usar para encontrar la línea de mejor ajuste.

Para saber si una línea es de mejor ajuste, o sea, cuán bien se ajusta una línea a un conjunto de datos (x, y), se utiliza el coeficiente de correlación. El ***coeficiente de correlación***, $\boldsymbol{r}$, es un número de -1 a 1 que mide cuán bien se ajusta una línea a un conjunto de datos (x, y), además mide la fuerza de relación entre las variables.

Cuando r esta cerca de 1 los puntos están cerca de una línea cono pendiente positiva, pero cuando r se acerca a -1 los puntos están cerca de una línea con pendiente negativa. Si r se acerca a 0 no existe correlación.

Calcular y determinar la ecuación de la línea de mejor ajuste o línea de regresión es una tarea que conlleva un poco de tiempo. Además, es importante conocer lo que significan los símbolos y expresiones matemáticas para comprender las fórmulas a utilizarse. Pero, no podemos olvidar, que esa línea de regresión es una recta, por lo tanto, tendrá una pendiente (m) y un intercepto en y (b).

Para determinar la línea de mejor ajuste o línea de regresión necesitamos:

- la pendiente, $\boldsymbol{m}$
- el intercepto en y, $\boldsymbol{b}$

Si conocemos estos valores los podemos sustituir en la ecuación $y = mx + b$ obteniendo la ecuación de la línea de mejor ajuste.

Para hallar la pendiente debemos usar la siguiente fórmula:

$$\boldsymbol{m} = \frac{n(\sum xy) - (\sum x)(\sum y)}{n(\sum x^2) - (\sum x)^2}$$

Para hallar el intercepto en y usaremos:

$$\boldsymbol{b} = \bar{y} - m\bar{x}$$

Ahora veremos lo que significa cada símbolo o expresión matemática.

$\boldsymbol{n}$	cantidad total de datos (pares ordenados)
$\sum$	se lee “sumatoria”, representa que se realizará una suma
$\boldsymbol{xy}$	el producto de x por y (multiplicamos)
$\sum \boldsymbol{xy}$	se multiplica cada valor de x por cada valor de y, luego se suman los productos
$\sum \boldsymbol{x}$	se suman todos los valores de x
$\sum \boldsymbol{y}$	se suman todos los valores de y

$(\sum x)(\sum y)$	multiplicar la suma de todos los valores de x por la suma de todos los valores de y
$\sum x^2$	elevar a la segunda potencia (al cuadrado) cada valor de x y luego sumar todos esos cuadrados
$(\sum x)^2$	sumar todos los valores de x, luego elevar al cuadrado esa suma
$\bar{x}$	media o media aritmética de x, es el promedio de los valores de x. Se obtiene sumando todos los valores de x y dividiendo esa suma entre la cantidad total de datos (n) $\rightarrow\ \bar{x} = \frac{\sum x}{n}$

Entonces, conociendo los símbolos, expresiones y su significado podemos buscar la *línea de mejor ajuste* o *línea de regresión*. Aunque parezca complicado no lo es, lo primero que debemos hacer es buscar todas las partes que componen cada una de las fórmulas para la pendiente ($\boldsymbol{m}$) y el intercepto en y ($\boldsymbol{b}$).

Ejemplo

Calcular la ecuación de regresión lineal de los siguientes datos:

x	3	1	3	5
y	5	8	6	4

Busquemos la pendiente con

$$\boldsymbol{m} = \frac{n(\sum xy) - (\sum x)(\sum y)}{n(\sum x^2) - (\sum x)^2}$$

Halla la data

x	y	xy	x^2
3	**5**	**15**	**9**
1	**8**	**8**	**1**
3	**6**	**18**	**9**

5	**4**	**20**	**25**
$\sum x$ **=12**	$\sum y$ **=23**	$\sum xy$ **= 61**	$\sum x^2$ **=44**

n	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$(\sum x)^2$
4	$\frac{12}{4}$ **= 3**	$\frac{23}{4} = 5.75$	$12^2 = 144$

Busca la pendiente:

$$m = \frac{n(\sum xy) - (\sum x)(\sum y)}{n(\sum x^2) - (\sum x)^2} = \frac{4(61) - (12)(23)}{4(44) - (144)} = \frac{244 - 276}{176 - 144} = \frac{-32}{32} = -1$$

Buscar el intercepto en y:

$b = \bar{y} - m\bar{x}$

$b = 5.75 - (-1)(3)$

$b = 5.75 - (-3)$

$b = 5.75 + 3$

$b = 8.75$

Con la pendiente (m) y el intercepto en y (b) podemos escribir la ecuación de la línea de mejor ajuste o línea de regresión:

$y = -x + 8.75$

Ejercicios de Práctica

A continuación, se presenta la tabla con los pesos y estaturas de ocho estudiantes.

x: *peso en kg*	72	65	77	80	64	68	76	58
y: *estatura en cm*	180	158	175	168	170	176	174	159

a) Dibujar el diagrama de dispersión.

b) De acuerdo con el diagrama de dispersión, ¿las variables aparentan estar relacionadas? Explica tu respuesta.

c) Calcular la ecuación de la línea de mejor ajuste.

d) ¿Qué altura se espera que tenga un estudiante cuyo peso es 70 kg?

Lección 6. Función Cuadrática

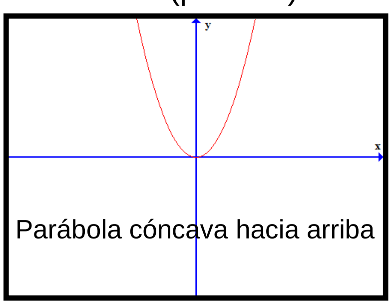
Una ***función cuadrática*** se expresa de la siguiente forma:

La función cuadrática es usada en áreas de la ciencia, los negocios y la arquitectura entre sus diversas aplicaciones.

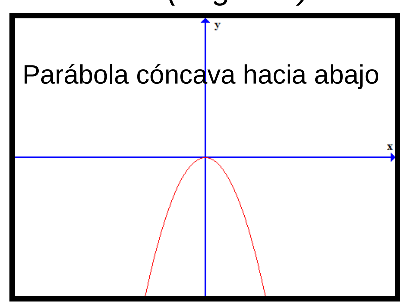
$f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, donde *a, b y c* pertenecen a los números reales

Su gráfica se llama ***parábola*** y su ***dominio*** es el <u>*conjunto de los números reales*</u> $(-\infty, \infty)$. El valor de ***a*** determina la concavidad de la gráfica, entiéndase que la parábola abra hacia arriba o hacia abajo.

a > 0 (positiva)



a < 0 (negativa)



Ejemplo

Determina la concavidad de la parábola.

$f(x) = 7 - x^2 + 2x$

- El valor de *a* es el coeficiente de la variable cuadrática. *a = -1*
- Por lo tanto, la parábola será cóncava hacia abajo.

Ejercicio de Práctica

1) Identifica si las siguientes parábolas son cóncavas hacia arriba o cóncavas hacia abajo.

   a) $y = 5 - 8x + x^2$ ________________________

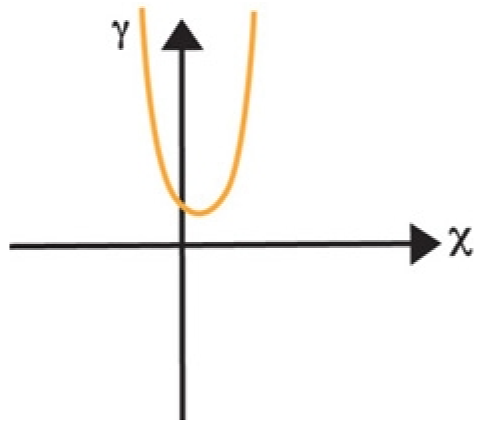
   b) $y = -2x^2 - 2x + 3$ ________________________

   c) $y = x^2 + 2x - 8$ ________________________

   d) $y - x^2 = 7x$ ________________________

   e) $-3y + 5x = x^2$ ________________________

Intersección con el eje x



Para obtener los valores de x donde la gráfica de la parábola interseca este eje, *f(x)* se debe igualar a cero y resolver la ecuación cuadrática utilizando los métodos de:

- Factorización
- Raíces cuadradas
- Completando el cuadrado
- Fórmula Cuadrática

Este resultado lo llamaremos *soluciones* o *ceros de la función*, debido a que el valor de la coordenada de ***y*** en estos casos siempre será cero (x, 0).

Determinar las soluciones de una función cuadrática

Para determinar cuántas intersecciones en *x* (soluciones) tiene una ecuación cuadrática, utilizamos el ***discriminante*** **$b^2 - 4ac$**.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\boxed{b^2 - 4ac}}}{2a} \rightarrow \text{Discriminante}$$

Existen 3 posibles casos que observaremos en la tabla a continuación.

Caso del Discriminante	Ejemplo	Solución
$b^2 - 4ac > 0$ **la ecuación tiene dos soluciones, que son números reales distintos**	$3x^2 + 5x + 2 = 0$ $a = 3, b = 5, c = 2$ $5^2 - 4(3)(2)$ $25 - 24$ $1 > 0$	$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(3)(2)}}{2(3)}$ $\frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{6} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{6}$ $x_1 = \frac{-5 + 1}{6} = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3}$ $x_2 = \frac{-5 - 1}{6} = \frac{-6}{6} = -1$
$b^2 - 4ac = 0$ **la ecuación tiene una** **solución real**	$x^2 - 6x + 9$ $a = 1, b = -6, c = 9$ $(-6)^2 - 4(1)(9)$ $36 - 36$ 0	$x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(9)}}{2(1)}$ $\frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2}$ $\frac{6 \pm \sqrt{0}}{2}$ $\frac{6 \pm 0}{2} = 3$
$b^2 - 4ac < 0$ **la ecuación no tiene** **soluciones reales, sus** **raíces son complejas**	$x^2 + x + 2$ $a = 1, b = 1, c = 2$ $1^2 - 4(1)(2)$ $1 - 8$ $-7 < 0$	$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(2)}}{2(1)}$ $\frac{-1 \pm \sqrt{1 - 8}}{2}$ $\frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2} \notin$ R No pertenece a los números reales

Práctica

Determina cuántas soluciones o interceptos en x tiene cada una de las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando el discriminante.

a) $y = x^2 - 9$

b) $y = x^2 + 22x + 121$

c) $y = -2x^2 - x + 1$

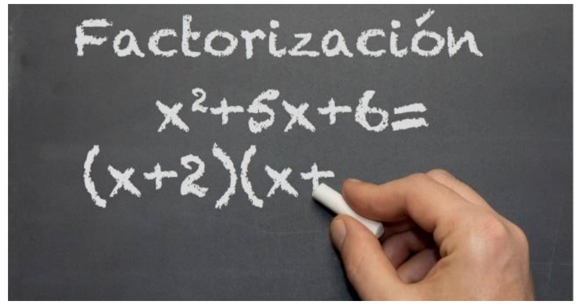
d) $y = x^2 - 6x + 18$

e) $y = 4x^2 + 5x + 7$

f) $y = x^2 - 11x + 28$

Hallar la intersección en x por medio de factorización

Logramos la factorización de una expresión cuando es convertirla en el producto de factores.



Ejemplo

$$f(x) = x^2 + 10x - 11$$

Usando el discriminante: $b^2 - 4ac = 10^2 - 4(1)(-11) = 144 > 0$

Podemos determinar que la ecuación tiene dos soluciones, que son números reales distintos porque el resultado es mayor a 0. Entonces resolvemos igualando a 0.

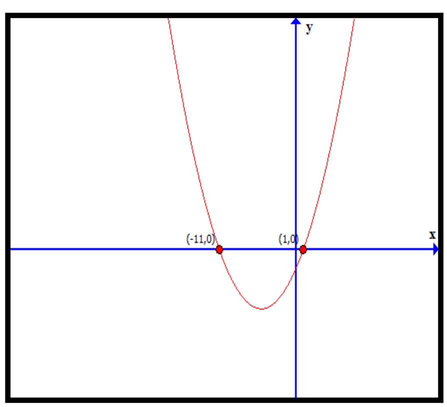
Factorización:

Igualar a cero $\Rightarrow$ $\boldsymbol{x^2 + 10x - 11 = 0}$

Factorizar $\Rightarrow$ $\boldsymbol{(x-1)(x+11) = 0}$

Despejar para x $\Rightarrow$ $x - 1 = 0$, $x = 1$ $x + 11 = 0$, $x = -11$

Ceros de la función $\Rightarrow$ (1, 0) y (-11, 0)



Práctica

Halla los *interceptos en x* por ***factorización***.

a) $y = x^2 - 3x - 40$

b) $y = x^2 + 22x + 120$

c) $y = -2x^2 + 10x - 8$

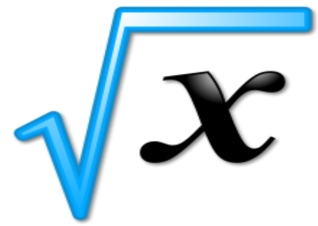
d) $y = -x^2 - 4x + 21$

e) $y = 10x^2 + x - 2$

f) $y = x^2 - 12x + 27$

Hallar la intersección en x por medio del método de raíces cuadradas

Recordemos que la raíz cuadrada de un número es el valor que cuando se multiplica por el mismo, nos da el número original.



Ejemplo $f(x) = 4x^2 - 16$

Usando el discriminante: $b^2 - 4ac = 0^2 - 4(4)(-16) = 256 > 0$

Observamos que la ecuación tiene dos soluciones, que son números reales distintos ya que el resultado es mayor a 0.

Método de raíces cuadradas

$4x^2 - 16 = 0$ → Igualar a cero

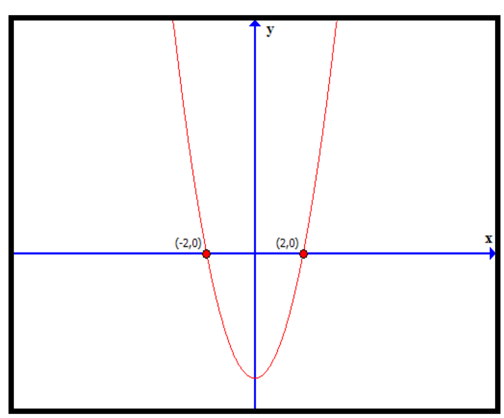
$4x^2 = 16$ → Sumar en ambos lados 16

$\frac{4x^2}{4} = \frac{16}{4}$ → Dividir entre 4 en ambos lados

$\sqrt{x^2} = \sqrt{4}$ → Hallar la raíz cuadrada en ambos lados

$x = \pm 2$ → Soluciones

(2, 0) y (-2, 0) → Ceros de la función



Práctica

Halla los *interceptos en x* utilizando el ***método de raíces cuadradas***.

a) $y = x^2 - 81$

b) $49 + y = 121x^2$

c) $y = -9x^2 + 20$

d) $y = 64x^2 - 16$

e) $y = x^2 - 144$

Hallar la intersección en x por medio del método completar el cuadrado

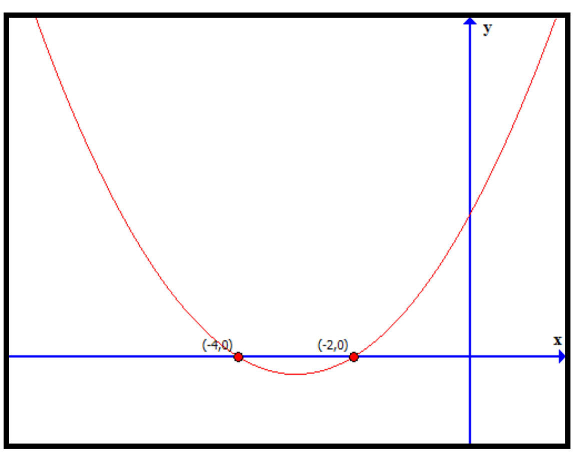
Ejemplo $f(x) = x^2 + 6x + 8$

Discriminante: $b^2 - 4ac = 6^2 - 4(1)(8) = 4 > 0$

La ecuación tiene dos soluciones, que son números reales distintos ya que el resultado es mayor a 0.

Método de completar el cuadrado

$\mathrm{x}^2 + 6\mathrm{x} = -8$	Dejar a un lado los términos con variables
$x^2 + 6x + 9 = -8 + 9$	Sumar a ambos lados $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9$
$x^2 + 6x + 9 = 1$	
$(x+3)(x+3) = 1$	Factorizar
$\sqrt{(x+3)^2} = \sqrt{1}$	Extraer raíz cuadrada a ambos lados
$x + 3 = \pm 1$	Despejar para la variable x
$x = -3 \pm 1$	
$-2 \;\; y - 4$	Soluciones
(-2,0) y (-4, 0)	Ceros de la función



Práctica

Halla los *interceptos en x* por el ***método de completar el cuadrado***.

a) $9 + y = x^2 + 5x$

b) $y - 25 = x^2 + 13x$

c) $y = x^2 + 8x - 8$

Hallar la intersección en x por medio de la fórmula cuadrática

Sea $ax^2 + bx + c = 0$

La fórmula cuadrática está dada por:

$\chi = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, donde se obtienen dos raíces x_1 y x_2

Ejemplo

$$f(x) = -5x^2 + 8x + 4$$

Determinante: $b^2 - 4ac = 8^2 - 4(-5)(4) = 144 > 0$

La ecuación tiene dos soluciones, que son números reales distintos.

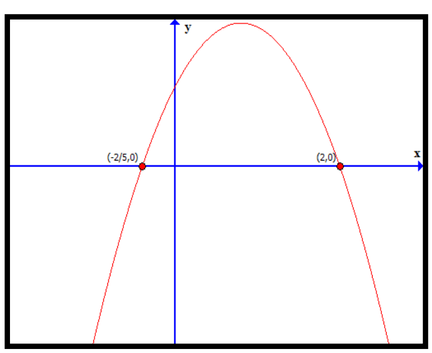
$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $\qquad a = -5, b = 8, c = 4$

$$x_1 = \frac{-8 + 12}{-10} = \frac{4}{-10} = \frac{-2}{5}$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4(-5)(4)}}{2(-5)} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 80}}{-10} = \frac{-8 \pm \sqrt{144}}{-10} =$$

$$x_2 = \frac{-8 - 12}{-10} = \frac{-20}{-10} = 2$$

Podemos concluir que los *ceros de la función* o *interceptos en x* son $\left(\frac{-2}{5}, 0\right)$ y (2, 0)



Práctica

Halla los *interceptos en x* por medio de la ***fórmula cuadrática***.

a) $6x^2 + 2x - 3 = y$

b) $y = 4x^2 + x + 2$

c) $y - 1 = x^2 + 2x$

d) $y = -x^2 - 4x + 2$

e) $y = x^2 - 3x - 4$

f) $y = 2x^2 + 8x + 1$

Intersección con el eje de y

Para obtener el valor de ***y*** donde la gráfica interseca este eje, se debe evaluar la función para x = 0 y resolver la misma.

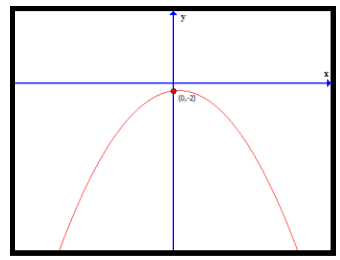
Ejemplo

Halla el *intercepto en* ***y*** de la parábola de $f(x) = -3x^2 + x - 2$

Evaluar para x=0 ⟹ $f(0) = -3(0)^2 + 0 - 2$

Simplificar ⟹ $f(0) = -2$

Intercepto en y ⟹ (0, -2)



Halla la *intersección en el eje de y* .

a) $3x^2 + x = y$

b) $y = x^2 - 4x + 4$

c) $y - 1 = 9x^2 - 6x$

d) $y = -3x^2 - 6x + 5$

Valor máximo o mínimo de una parábola

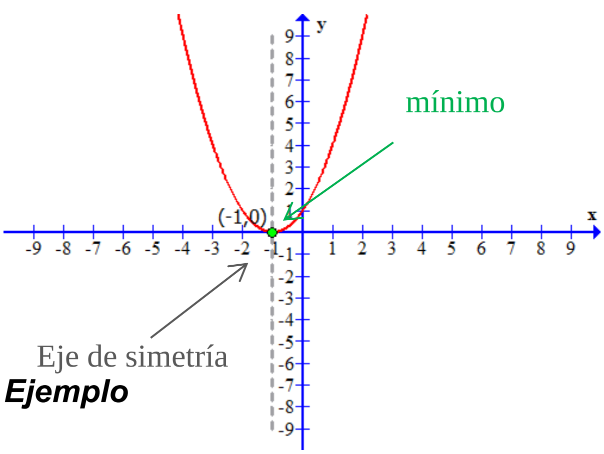
La parábola correspondiente a la ecuación $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene un valor máximo o mínimo en $x = -\frac{b}{2a}$.

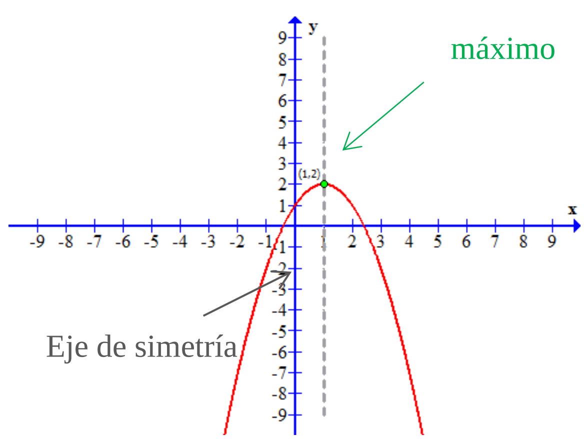
$a > 0$ La gráfica es cóncava hacia arriba y la parábola tiene valor mínimo $f(-\frac{b}{2a})$. Su campo de valores comienza en esta abscisa, hasta el infinito(x, ∞).

$a < 0$ La gráfica es cóncava hacia abajo y la parábola tiene valor máximo $f(-\frac{b}{2a})$. Su campo de valores va desde negativo infinito hasta esta abscisa,$(x, -\infty)$.

Con la fórmula anterior podemos hallar la coordenada de x en el punto máximo o mínimo de la parábola. Si deseas hallar el par ordenado completo, debes sustituir el valor encontrado, en la ecuación original. Este resultado será el valor de y. Con ambos podrás formar la coordenada donde se encuentra el punto máximo o mínimo.

Una línea vertical que divide una parábola en dos mitades iguales se llama el ***<u>eje de simetría</u>***. El eje de simetría siempre pasa a través del vértice de la parábola.





Ejemplo

Halle el valor máximo o mínimo de las siguientes funciones cuadráticas y su campo de valores.

a) $f(x) = 2x^2 - 6x + 4$ ➡ a > 0 máximo

a = 2 b = - 6 c = 4

Coordenada de x

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2(2)} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

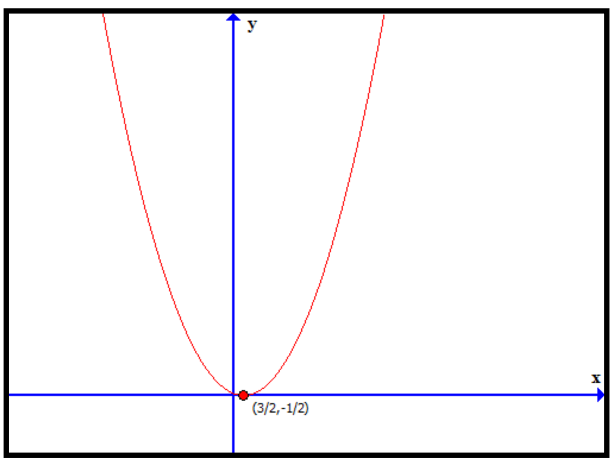
eje de simetría $x = \frac{3}{2}$

Campo de valores: $\left[-\frac{1}{2}, \infty\right)$

Coordenada de y

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{3}{2}\right) + 4 = 2\left(\frac{9}{4}\right) - 9 + 4 = \frac{9}{2} - 5 = \frac{9}{2} - \frac{10}{2} = -\frac{1}{2}$$

El vértice de la parábola es $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$



b) b) $f(x) = -x^2 - 2x + 8$ → a < 0 mínimo

a = -1 b = -2 c =8

Coordenada de x

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2(-1)} = \frac{2}{-2} = -1$$

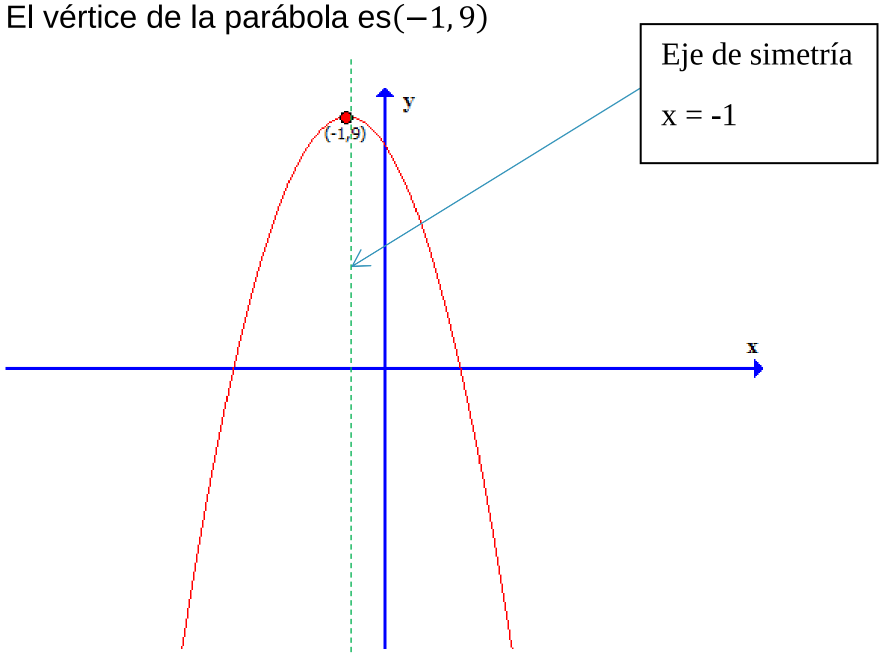
eje de simetría $x = -1$

Campo de valores: $(-\infty, 9]$

Coordenada de y

$$f(-1) = -(-1)^2 - 2(-1) + 8 = -1 + 2 + 8 = 9$$

El vértice de la parábola es$(-1, 9)$



Valores máximos y mínimos de funciones cuadráticas en ecuación estándar de una parábola con eje vertical

La gráfica de la ecuación $\boldsymbol{f(x) = a(x - h)^2 + c}$ donde $a \neq 0$, a, h y c son números reales, es una parábola con vértice (h, c) y un eje vertical. La parábola tiene un mínimo y abre hacia arriba si a > 0 y tiene un máximo y abre hacia abajo si a < 0.

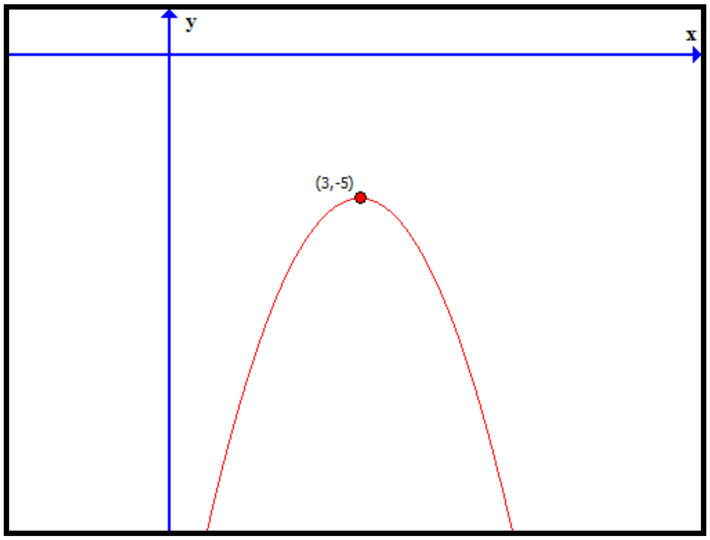
Ejemplo

Determina el máximo o mínimo de la siguiente función

$$f(x) = -2(x - \mathbf{3})^2 - \mathbf{5}$$

El vértice es$(3,-5)$

La parábola abre hacia abajo (concavidad) porque $a=-2$



Práctica

Halla el valor máximo o mínimo de las siguientes funciones cuadráticas. Determina el dominio y campo de valores de cada una de ellas.

a) $y=-x^2+2$

b) $y=2x^2+x-3$

a) $y=5x^2-20x+4$

b) $y = x^2 + x + 10$

c) $y = -3x^2 - 4x + 4$

d) $y = x^2 + 8x + 15$

Sea la función cuadrática $f(x) = x^2 - 6x + 5$. Halle:

a) Interceptos en ***x*** y ***y***

b) Vértice

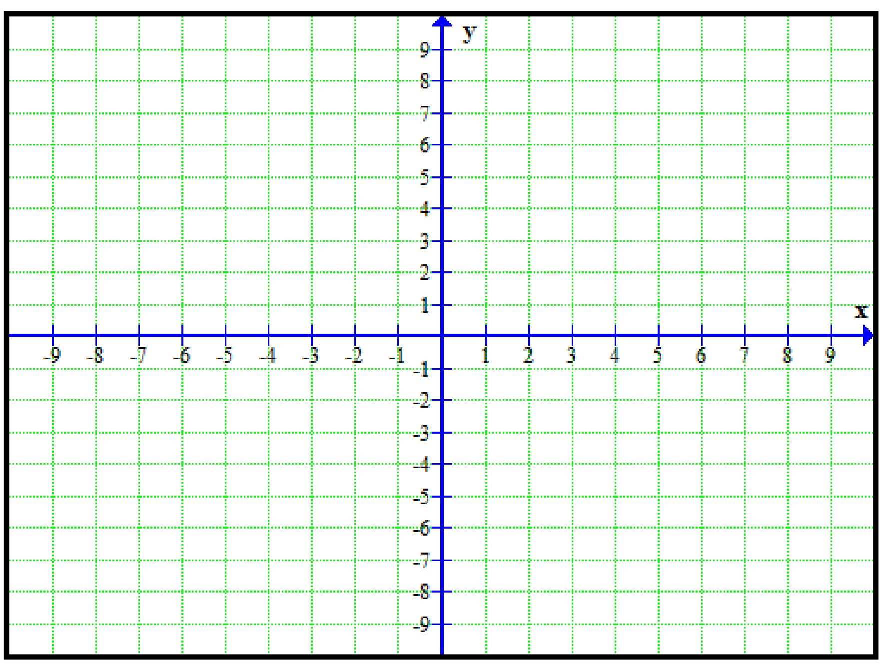
c) Eje de simetría

d) Concavidad

e) Gráfica

f) Dominio

g) Campo de valores o rango



2) Francisco se encuentra en el tope de una chorrera acuática. La distancia d, a la que se encuentra la chorrera del suelo a medida que él desciende está determinada por la ecuación $d = 100 - 4t^2$, donde t es el número de segundos que se toma Francisco en bajar a hasta el final de la chorrera. ¿Cuántos segundos se tomará Francisco en llegar abajo?

Lección 10 Ecuaciones de la recta

Prueba sugerida La pendiente y ecuación de la recta **Valor total: 50 puntos**

A. Identifica, en cada una de las siguientes ecuaciones, la pendiente y el intercepto en y. 10 pts

Ecuación	m	b
$x - y = 15$		
$y = -10$		
$2x + y = 7$		
$4 + 5x = \frac{1}{3}y$		
$x = 4$		

B. Escribe la ecuación de la recta que satisfaga las siguientes condiciones: 15 pts

1. Pasa por $(-2, 4)$ y $(-6, 8)$
2. Pasa por $(3, 0)$ y la pendiente es cero.
3. Pasa por $(2, -1)$ y no está definida
4. Pasa por $(-1, -1)$ y es paralela al eje de x
5. Pasa por $(-2, -3)$ y es perpendicular a la ecuación $9x - \ 3y = 15$

C. Dibuja la gráfica de las siguientes ecuaciones: 20 pts

5. $y = 4x - 2$
6. $-2y = 16x + 20$
7. $y = 5$
8. $x = 1$

D. Determina el valor de y si la recta pasa por los puntos (4, y) y (5, -2), y tiene pendiente igual a 3. 5 pts

Unidad 3: Funciones y transformaciones

Lección 1: Familia de funciones y transformaciones

A. Propiedades de las funciones

Familia de funciones

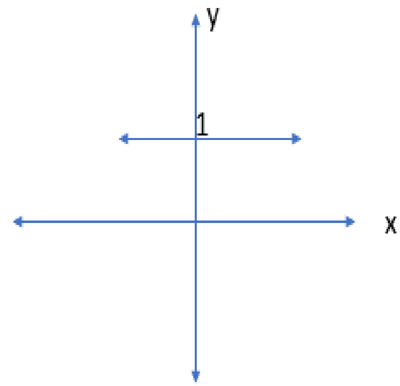
Existe una gran variedad de funciones. Las funciones que pertenecen a la misma familia comparten características clave, que solamente las tienen ese conjunto de funciones. La función madre es aquella más básica en una familia. Las funciones que pertenecen a la misma familia, pero que no son la función madre, son transformaciones precisamente de la función madre. A continuación, se presentan algunas de las familias de funciones, sus gráficas, dominio y campo de valores o rango.

Funciones madre

Familia	Constante	Lineal	Valor absoluto	Cuadrática	Cúbica
Regla	$f(x) = 1$	$f(x) = x$	$f(x) = \|x\|$	$f(x) = x^2$	$f(x) = x^3$
Dominio	Todos los números reales	Todos los números reales	Todos los números reales	Todos los números reales	Todos los números reales
Campo de valores o rango	$y = 1$	Todos los números reales	$y \geq 0$	$y \geq 0$	Todos los números reales

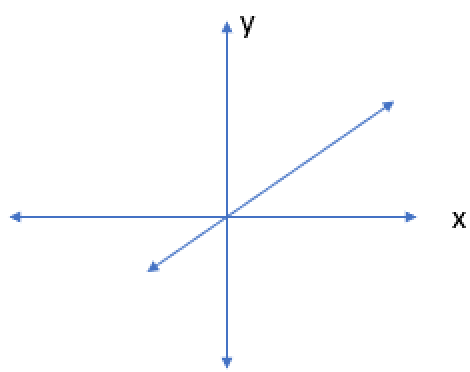
Gráficas de las funciones madre o básicas

$f(x)$ = a



Es una recta horizontal, con intercepto en y igual a 1.

Las gráficas de las funciones constantes son rectas horizontales, cuyo intercepto en y es el número a quien
le llamamos constante. El campo de valores solamente estará compuesto por la constante. Si la función es
$f(x)$ = *a*, el campo de valores será *a*.



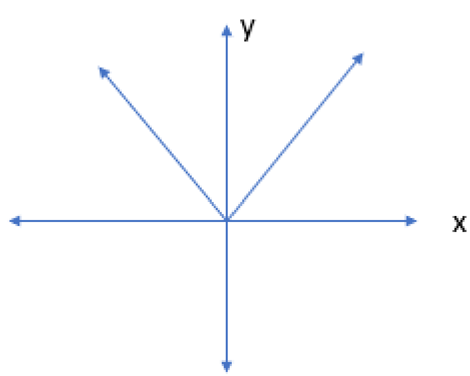
$f(x) = x$

Las gráficas lineales son siempre una línea recta, de ahí su nombre.

Esta gráfica básica pasa por el punto (0,0).

Todos los números reales pertenecen al dominio porque x puede ser sustituida por cualquier valor real. Al sustituir en la función cualquier valor real en x, producirá un número real en y (igual al de x).

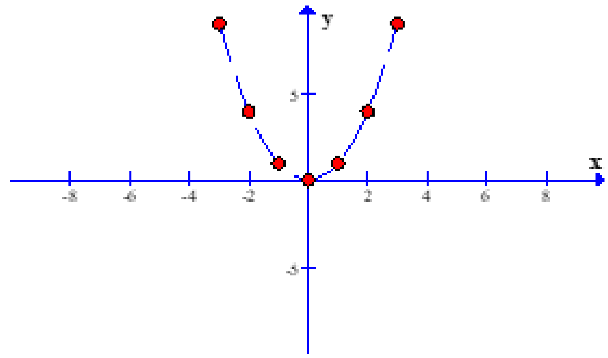
$f(x) = |x|$



La función valor absoluto tiene como dominio cualquier número real, sin embargo, el campo de valores o rango está compuesto por los números mayores o iguales a cero (0). El valor absoluto de un número representa la distancia desde el ce
nunca son negativas.

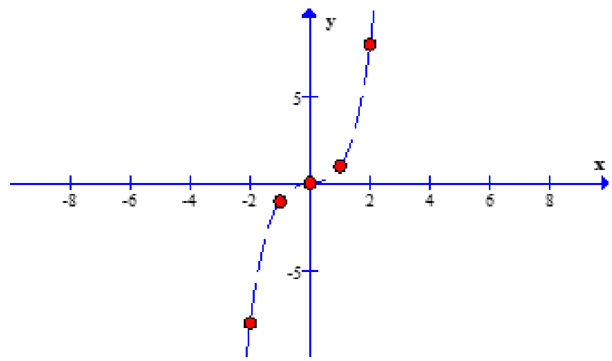
$f(x) = x^2$

Esta gráfica es una parábola que abre hacia arriba y pasa por el punto (0,0). Cualquier valor real puede sustituirse por x, pero el resultado de y será un número mayor o igual que cero (0). Todo número elevado a la segunda potencia o al cuadrado siempre dará resultado un número positivo.



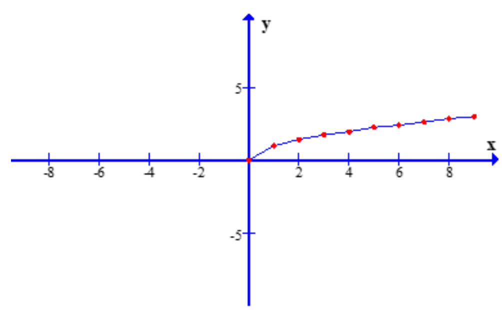
$f(x) = x^3$

Se le conoce como función cúbica básica. La x puede asumir cualquier valor real y la y también. Por eso, el dominio y el campo de valores están compuestos por los números reales.



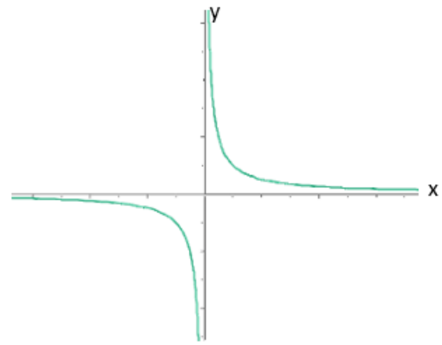
$f(x) = \sqrt{x}$

Se le conoce como función raíz cuadrada básica. La x no puede asumir cualquier valor porque en el conjunto de los números reales no está definida la raíz cuadrada de un número negativo. Solamente buscamos raíces cuadradas de números positivos en los reales. Es por eso que el dominio de la función está compuesto por los números reales mayores o iguales a cero. El campo de valores está compuesto por el conjunto de los números reales mayores o iguales a cero.



$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Se le conoce como función racional básica. La x no puede asumir cualquier valor porque la división por cero no está definida. El denominador de una fracción no puede ser cero, por lo tanto, el dominio está compuesto por todos los números reales excepto el cero. En este tipo de funciones, para determinar el dominio, hay que determinar cuál o cuáles son los números que hacen que el denominador sea cero y lo (s) excluimos del dominio.

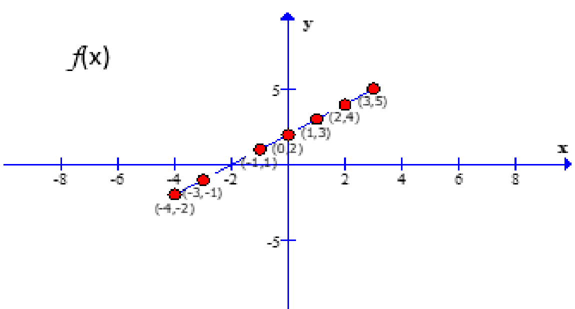


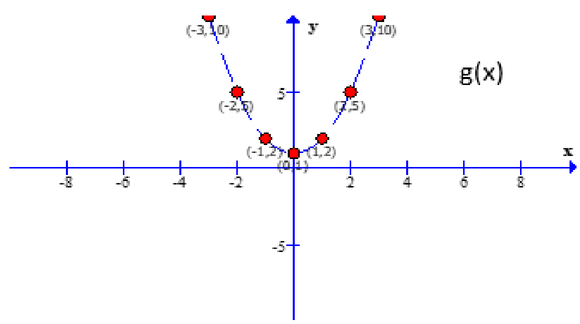
El campo de valores está formado por todos los números reales excepto el cero. Las curvas que se forman se acercan a los ejes de x y de y, pero no los toca.

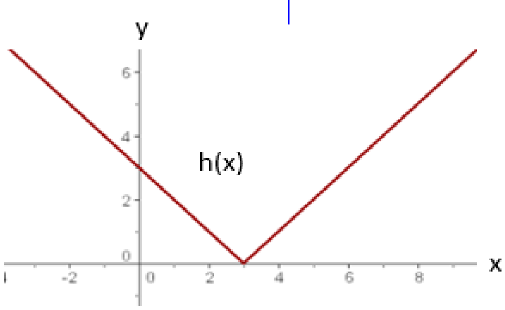
Asíntotas

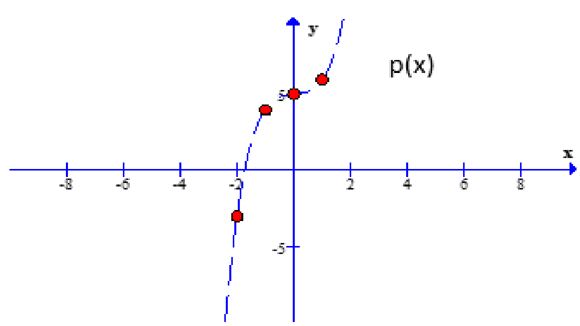
Las asíntotas son rectas a las cuales la función se va acercando indefinidamente. En el caso de la función racional el eje de x y el eje de y son asíntotas de la función. Las asíntotas pueden ser verticales, horizontales u oblicuas.

Observemos las siguientes gráficas para compararlas con la función madre o básica









La función f es tiene como gráfica una recta, por lo tanto, pertenece a la familia de las funciones lineales. Podemos observar que se desplaza hacia arriba dos (2) unidades. Cruza o se interseca con el eje de y en el punto (0,2), no en el punto (0,0), como la función madre.
La función g se desplaza hacia arriba una unidad. La gráfica tiene forma de parábola que abre hacia arriba y pertenece a la familia de las funciones cuadráticas.

La función h tiene forma de V, por lo tanto, pertenece a la familia de las funciones valor absoluto. Ser desplaza hacia la derecha tres (3) unidades en comparación con la función madre o básica.
La función p pertenece a la familia de las funciones cúbicas. Se desplaza hacia arriba cinco (50 unidades en comparación con la función cúbica básica. Estos cambios que hemos observado en las funciones en comparación con la función madre es lo que conocemos como transformaciones en las funciones. Una transformación cambia el tamaño, la forma, la posición o la orientación de una gráfica. A continuación, presentamos las transformaciones más comunes en las gráficas de funciones.

Traslación – es una transformación que desplaza una gráfica horizontalmente (a la derecha o izquierda) o verticalmente (arriba o abajo), pero no cambia su tamaño, forma u orientación.
Ejemplos

$y = f(x - h)$ traslación horizontal derecha
$f(x) = (x - 2)^2$

$y = f(x) + k$ traslación vertical arriba
$f(x) = x - 2$

$y = f(x + h)$ traslación horizontal izquierda
$f(x) = (x + 2)^2$

$y = f(x) - k$ traslación vertical abajo
$f(x) = x + 2$

Reflexión – es una transformación que invierte una gráfica sobre una línea llamada línea de reflexión. Un punto reflejado es la misma distancia desde la línea de reflexión que el punto original, pero en el lado opuesto de la línea.

Ejemplos

f(x) = $-|x-3|$ g(x) = $-x^2$ h(x) = $-(x^3+1)$

Alargamiento y encogimiento vertical – es una transformación que surge cuando se multiplica la función por un número mayor que 1, o mayor que 0 y menor que 1. Cuando el factor es mayor que 1, la transformación es un alargamiento vertical. Cuando el factor es mayor que 0 y menor que 1, entonces es un encogimiento vertical.

Ejemplos

f (x) = $2x$ alargamiento vertical h(x) = $\frac{1}{3}x$ encogimiento vertical

g(x) = $3|x|$ alargamiento vertical p(x) = $\frac{2}{5}|x|$ encogimiento vertical

Alargamiento o encogimiento horizontal – es una transformación que surge cuando la variable x se multiplica por algún factor. Esto es $y = f\ (ax)$, $a \neq 1$, a > 0.

Ejemplos:

$f\ (x)$ = $|3x|$ encogimiento horizontal $h(x)$ = $\left|\frac{1}{2}x\right|$ alargamiento horizontal

$m(x) = \sqrt{2x}$ encogimiento horizontal $n(x) = \sqrt{\frac{2}{3}x}$

Ejemplos de combinaciones de transformaciones

$g(x)$ = $|3x-3|$ encogimiento horizontal y traslación vertical 3 unidades hacia abajo

$p(x)$ = $5x^3$ + 3 alargamiento y traslación vertical 3 unidades hacia arriba

$h(x) = 2\sqrt{x-5}$ alargamiento vertical y traslación horizontal 5 unidades hacia la derecha

$d(x) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{-x+2}\right)+6$ reflexión con respecto al eje de y, encogimiento vertical, traslación horizontal a la izquierda 2 unidades y traslación vertical hacia arriba 6 unidades

Ejercicios de práctica 5

A. ¿A cuál familia pertenecen las siguientes funciones?

1. $f(x) = 2x^2 - 7$
2. $g(x) = |x - 4|$
3. $h(x) = 4x + 6$
4. $d(x) = x^3 + 2$
5. $n(x) = 9$
6. $m(x) = \frac{4}{x+3}$
7. $p(x) = \sqrt{x - 7}$

B. Haz una gráfica de cada función. Luego describe la transformación.

1. $f(x) = x + 3$
2. $g\ (x) = |2x + 5|$
3. $h(x) = -(x^2 - 1)$
4. $r(x) = \frac{1}{x+4}$
5. $k(x) = \sqrt{2(x + 1)}$

C. Dadas $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = x^2 + 5x + 6$, encontrar:

1. $(f + g)(x)$
2. $(f - g)(x)$
3. $(f \cdot g)(x)$
4. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

Lección 2: Simetría de funciones, funciones pares e impares

En esta sección del módulo vamos a estudiar una de las características más importantes de una función que puede facilitar el estudio de las funciones y sus representaciones gráficas: la simetría. Algunas funciones son simétricas y otras no lo son, en el caso de que la función sea simétrica hay dos tipos de simetría.

Tipos de simetría

1. Simetría con respecto al origen
2. Simetría con respecto al eje de y

Si la ecuación es simétrica con respecto al eje de x no es una función.

Simetría con respecto al origen también conocida como simetría impar o función impar

Una función tiene simetría impar cuando la función f(-x) = - f(x). Esto significa que, para cada valor de la función en un punto, es el valor opuesto del punto opuesto.

Ejemplo

Determinar si la función es impar.

$f(x) = x^3 - 7x$ Demostremos que: $f(-x) = -f(x)$

Buscar $f(-x)$

$f(-x) = (-x)^3 - 7(-x)$

$f(-x) = -x^3 + 7x$

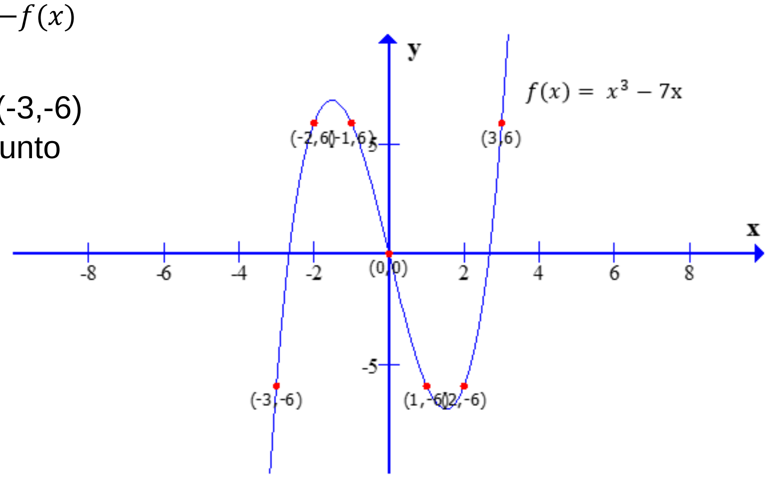
Buscar $-f(x)$

$-f(x) = -(x^3 - 7x)$

$-f(x) = -x^3 + 7x$

$$f(-x) = -f(x)$$

Dos puntos de la gráfica son: (3,6) y (-3,-6) ambas coordenadas en el segundo punto cambian de signo.



Simetría con respecto al eje de y también conocida como simetría par o función par

Una función tiene simetría par cuando la función $f(x) = f(-x)$. Esto es cuando cada valor de la función en un punto coincide con el valor de la función en el inverso.

Ejemplo

Determinar si la función es par.

$f(x) = x^2 + 1$ Demostremos que $f(x) = f(-x)$.

Buscar $f(x)$ (está dada)

$f(x) = x^2 + 1$

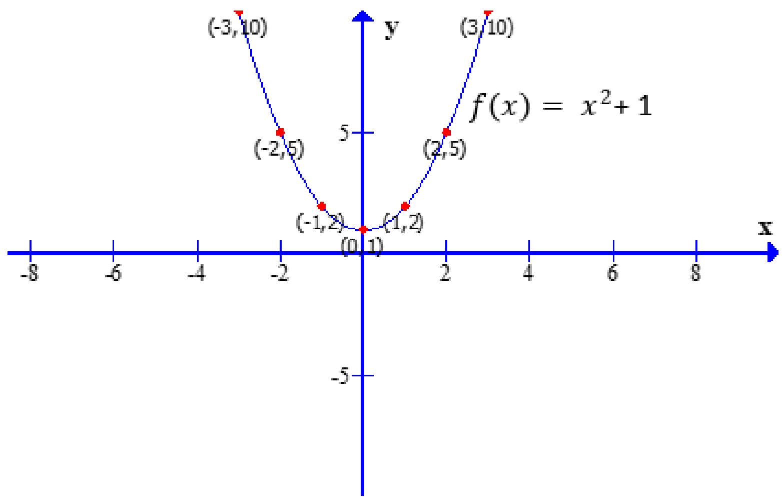
Buscar $f(-x)$

$f(-x) = (-x)^2 + 1$

$f(-x) = x^2 + 1$

Todo número elevado a la segunda potencia da como resultado un número positivo

$f(x) = f(-x)$



Podemos observar que, si doblamos la gráfica por el eje de y, notamos que ambos lados son idénticos, como si se vieran en el espejo (eso es simetría con respecto al eje de y).

Debemos ser cuidadosos al elevar números a diferentes potencias. Esto es multiplicar por el mismo número las veces que indique el exponente. Además, hay que tomar en cuenta las reglas de los enteros (negativos y positivos), debemos repasarlas.

Ejercicios de Práctica 7

A. Determina si la función es par, impar o ninguna. Realiza el procedimiento.

1. $f(x) = -x^2 + 5$

2. $f(x) = x^4 - 5x^3$

3. $f(x) = 2x^5$

4. $f(x) = -x^6 - 10$

B. Dibuja la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 3$ y mediante la observación y el análisis determina si la función es par, impar o ninguna. Explica tu respuesta.

Prueba Familias de funciones, transformaciones y simetría Total 59 pts

A. Identifica la familia de las funciones, luego describe la transformación. 16pts
   1. $f(x) = 2x^2$
   2. $g(x) = \frac{3}{4}x$
   3. $h(x) = 3|x|$
   4. $k(x) = 5x + 4$

B. Identifica la familia de funciones, escribe la función madre o básica. Luego describe el dominio y el campo de valores o rango. 16 pts
   1. $g(x) = |x + 2| - 1$
   2. $f(x) = -4x + 3$
   3. $h(x) = 3x^2 - 2$
   4. $f(x) = 7$

C. Dibuja la gráfica de los ejercicios de la parte B. 12 pts

D. Determina si las siguientes funciones son pares, impares o ninguna. 15 pts
   1. $f(x) = 4x^3$
   2. $g(x) = x^2 + 5x + 1$
   3. $h(x) = x^4 + 3x^2 - 2$

Lección 3: Operaciones con funciones

Operaciones con funciones

Las funciones, como las expresiones algebraicas, pueden sumarse, restarse, multiplicarse y dividirse. En otras palabras, podemos realizar diferentes operaciones con las funciones.

Suma (adición)	$(f+g)(x)$	$f(x)+g(x)$
Resta (sustracción)	$(f-g)(x)$	$f(x)-g(x)$
Multiplicación	$(f \cdot g)(x)$	$f(x) \cdot g(x)$
División	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{f(x)}{g(x)}$

Ejemplos

Dadas $f(x) = 2x + 4$ y $g(x) = 5x - 1$, encontrar:

1. $(f+g)(x)$

2. $(f-g)(x)$

3. $(f \cdot g)(x)$

4. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (2x+4) + (5x-1) = 7x + 3$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = (2x+4) - (5x-1) = 2x + 4 - 5x + 1 = -3x + 5$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (2x+4)(5x-1) = 10x^2 + 20x - 2x - 4 = 10x^2 + 18x - 4$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x+4}{5x-1}$$

¡Inténtalo!

A. Dadas $f(x) = x - 5$ y $g(x) = -3x - 10$, encontrar:

1. $(f + g)(x)$

2. $(f - g)(x)$

3. $(f \cdot g)(x)$

4. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

Lección 4: Composición de funciones

Consideremos una forma importante de combinar dos funciones para obtener una nueva función. Este es el caso de la **composición de funciones**, que consiste en evaluar una función dentro de otra.

Definición

Composición de funciones: Dadas dos funciones f y g, la función compuesta denotada por $f \circ g$ (llamada "composición de f y g") está definida por

$$\boldsymbol{(f \circ g)\ (x) = f\ (\ g(x))}$$

Significa que evaluamos la función g en la función f. O sea, en la función f colocamos la función g donde aparezca la x. Esto es, sustituir en x la función g dentro de la función f.

https://www.youtube.com/watch?v=Sr5tuQzTVJg

Veamos los ejemplos a continuación:

Sean $f(x) = x^2$ y $g(x) = x - 3$,

a) encontrar las funciones $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.
b) encontrar $(f \circ g)(5)$ y $(g \circ f)(7)$.

Solución

$f(x) = x^2$ y $g(x) = x - 3$

a) $(f \circ g)(x) = f\left(g(x)\right) = f\ (x-3) = (x-3)^2 = (x-3)(x-3) = x^2 - 6x + 9$

$(g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right) = g\ (x^2) = x^2 - 3$

b) $(f \circ g)(5) = 5^2 - 6\ (5) + 9 = 25 - 30 + 9 = -5 + 9 = 4$

$(g \circ f)(7) = 7^2 - 3 = 49 - 3 = 46$

https://es.khanacademy.org/math/precalculus/x9e81a4f98389efdf:composite/x9e81a4f98389efdf:composing/v/function-composition

2) Sean las funciones: $f(x) = 3x + 2, \qquad g(x) = \dfrac{x+3}{2x+1}$

Calcular: $(f \circ g)(x)$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f[\frac{x+3}{2x+1}] = 3 \cdot (\frac{x+3}{2x+1}) + 2 = \frac{(3x+9) + 2 \cdot (2x+1)}{2x+1} = \frac{7x+11}{2x+1}$$

Calcular: $(g \circ f)(x)$

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g[3x+2] = \frac{(3x+2)+3}{2(3x+2)+1} = \frac{3x+5}{6x+5}$$

3) Sean las funciones: $f(x) = \dfrac{x+2}{2x+1}, \quad g(x) = \sqrt{x}$

Calcular: $(f \circ g)(x)$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f[\sqrt{x}] = \frac{\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}+1}$$

Calcular: $(g \circ f)(x)$

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g[\frac{x+2}{2x+1}] = \sqrt{\frac{x+2}{2x+1}}$$

4) Sean las funciones: $f(x) = \dfrac{1}{2x-1}, \quad g(x) = \dfrac{2x-1}{2x+1}, \quad h(x) = \dfrac{1}{x}$

Calcular: $(g \circ f)(x)$

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g[\frac{1}{2x-1}] = \frac{2(\frac{1}{2x-1}) - 1}{2(\frac{1}{2x-1}) + 1} = \frac{-2x+3}{2x+1}$$

Calcular

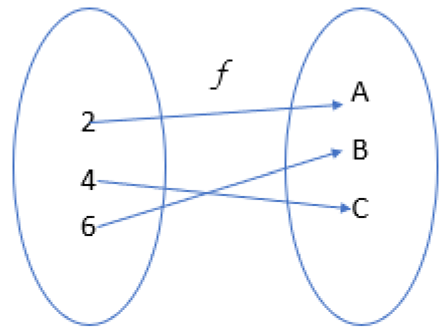
$$(h \circ g \circ f)(x) = h[g \circ (f(x))] = h[\frac{-2x+3}{2x+1}] = \frac{1}{\frac{-2x+3}{2x+1}} = \frac{2x+1}{-2x+3}$$

Ejercicios de práctica

Dada las funciones a continuación, determinar $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.

1) $\boldsymbol{f(x) = x^2}$ $\quad$ $\boldsymbol{g(x) = x - 1}$
2) $\boldsymbol{f\ (x) = x}$ $\quad$ $\boldsymbol{g(x) = 2x}$
3) $\boldsymbol{f(x) = 5 - x}$ $\quad$ $\boldsymbol{g(x) = x^2 - 3x}$
4) $\boldsymbol{f(x) = 3 - x^2}$ $\quad$ $\boldsymbol{g(x) = x^2 - 4}$
5) $\boldsymbol{f(x) = x + 1}$ $\quad$ $\boldsymbol{g(x) = 2x - 5}$
6) $\boldsymbol{f(x) = \frac{2}{x+1}}$ $\quad$ $\boldsymbol{g(x) = \frac{4}{x+1}}$

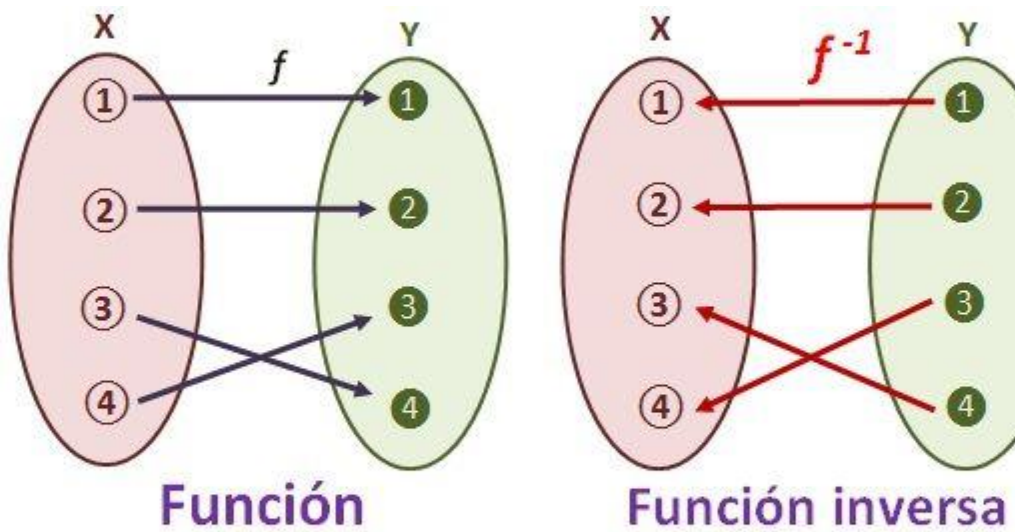
Lección 5: Funciones inversas



Las funciones inversas son funciones que "revierten" una a la otra.

En este ejemplo podemos observar que la función f convierte 2 en A, 4 en C y 6 en B.
La inversa de la función f

Sea *f* una función que asigna a los elementos de un primer conjunto (conjunto inicial *X*) un elemento de un segundo conjunto (conjunto final *Y*). La **función inversa** (o función recíproca) de *f* (denotada por $\boldsymbol{f^{-1}}$) es aquella que hace el camino inverso, asignando a los elementos de *Y* elementos de *X*.



Formalmente, diremos que f^{-1} es la **inversa** de *f* si:

$$\text{Si } f(x) = y \quad \text{entonces} \quad f^{-1}(y) = x$$

Además, lo podemos ver con la composición de funciones:

$$(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x) = x$$

Para que una función *f* tenga inversa necesariamente debe ser **inyectiva** o **uno a uno**.

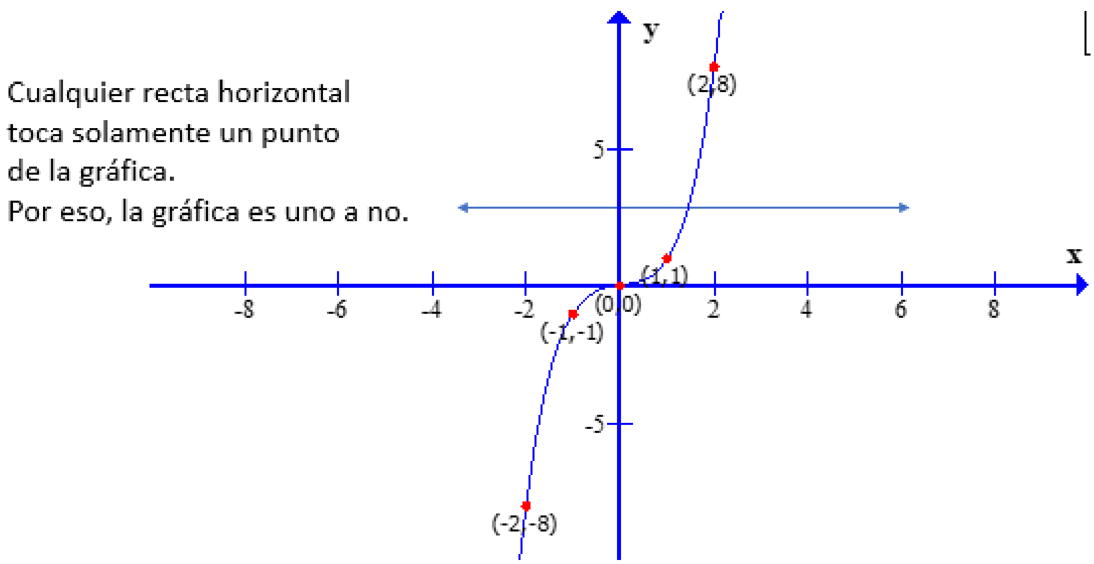
Función inyectiva o uno a uno

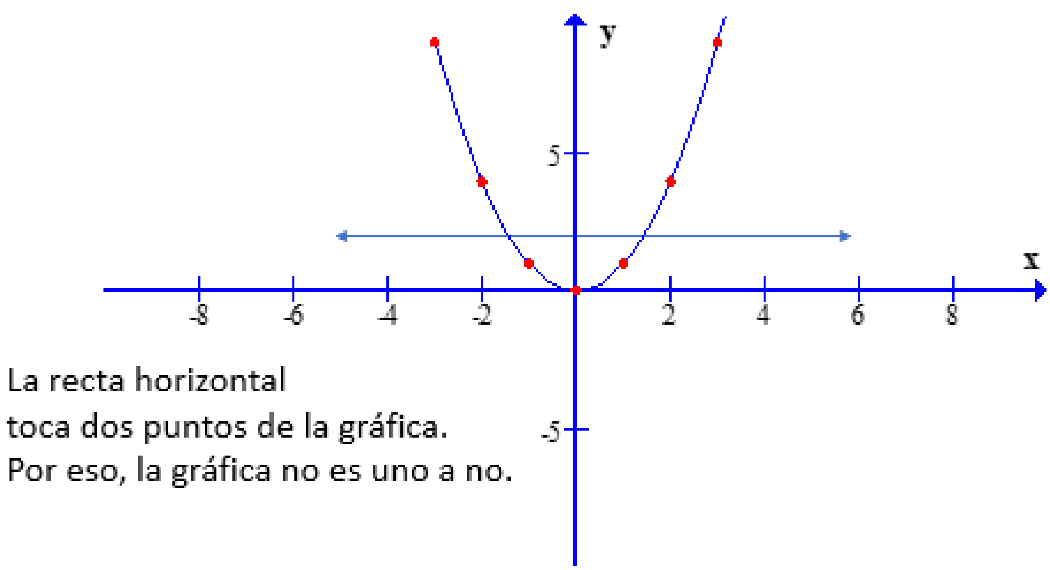
Una función con dominio A se denomina función inyectiva o uno a uno si no hay dos elementos de A que tengan el mismo campo de valores, esto es,

$f(x_1) \neq f(x_2)$ siempre que $x_1 \neq x_2$.

Prueba de la recta horizontal

Una función es uno a uno, si y sólo si, no hay una recta horizontal que cruce su gráfica más de una vez.

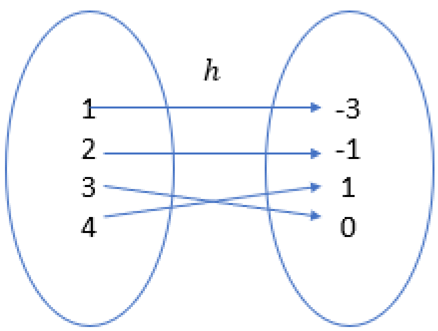


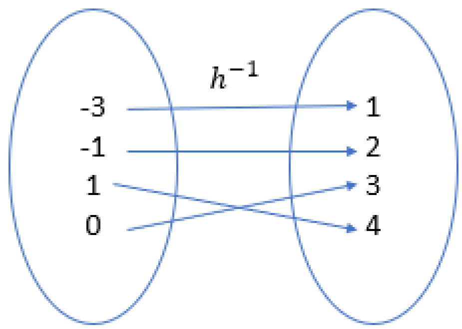


Definición formal de las funciones inversas

$\boldsymbol{f(a) = b \Longleftrightarrow f^{-1}(b) = a}$

Ejemplo: Observemos el diagrama de la función $\boldsymbol{h}$ y determinemos $\boldsymbol{h^{-1}}$.



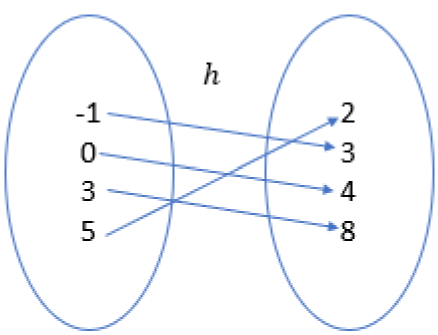


¿Cuánto es h^{-1} (3)? $h^{-1}(3) = 0$

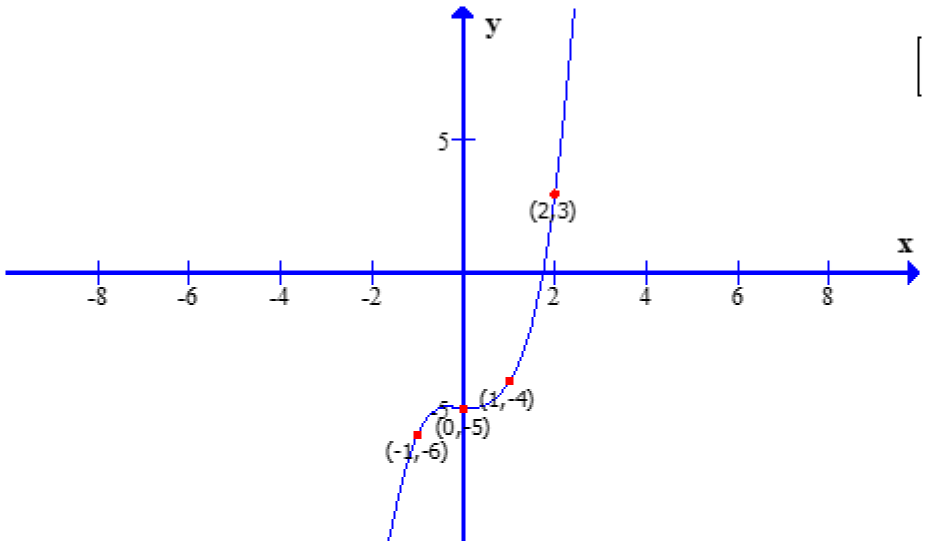
Comprobemos lo aprendido

Encuentra: $a)$ g^{-1} (3)

$b)$ $g^{-1}(8)$

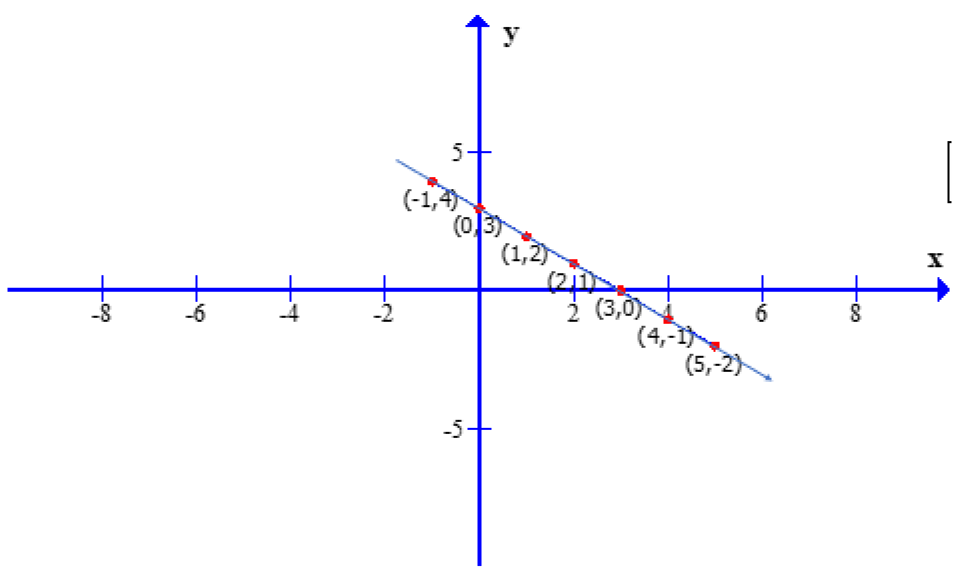


Veamos cómo encontrar la inversa de la gráfica de una función.



Para encontrar $g^{-1}\,(-5)$, podemos buscar el valor de entrada de g que corresponde a un valor de salida de -5. Esto es así porque $g^{-1}(-5) = x$, entonces, por la definición de función inversa, $g\,(x) = \, -5$. En la gráfica vemos que $g(0) = \, -5$, por lo tanto, $g^{-1}\,(-5) = 0$.

Observemos la siguiente gráfica y encontremos $h^{-1}\,(3)$.



Propiedades de la función inversa

Sea f una función uno a uno con dominio A y campo de valores o rango B. La función f^{-1} satisface las siguientes propiedades:

- $f^{-1}(f(x)) = x \; para \; todo \; x \; en \; A$
- $f(f^{-1}(x) = x \; para \; todo \; x \; en \; B$

Recíprocamente, cualquier función f^{-1} que satisfaga estas ecuaciones es la inversa de f. Esto significa que f es la función inversa de f^{-1} y f^{-1} es la inversa de f. Son inversas entre sí.

Ejemplo: Demostrar que $f(x) = x^3$ y $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$ son inversas entre sí.

$g(f(x)) = g(x^3) = (x^3)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{3}{3}} = x$

$f(g(x)) = f\left(x^{\frac{1}{3}}\right) = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = x^{\frac{3}{3}} = x$

f y g son inversas entre sí.

¿Cómo determinar la inversa de una función?

Para determinar la inversa de una función debemos seguir los siguientes pasos:

- Sustituir $f(x)$ por y.
- Despejar par x. Esto significa que realizaremos las operaciones necesarias para dejar la x sola en uno de los lados de la ecuación (por lo general se deja sola en el lado izquierdo).
- Intercambiar la x por y. La ecuación resultante es la inversa.
- Sustituir y por $f^{-1}(x)$.

Veamos algunos ejemplos: Encontrar la inversa de cada función.

a) $f(x) = 3x - 2$

$y = 3x - 2$ *cambiar* $f(x)$ *por* y

$y + 2 = 3x$ *despejar para* x

$\frac{y+2}{3} = x$

$x = \frac{y+2}{3}$

$y = \frac{x+2}{3}$ *cambiar* x *por* y

$f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$ *sustituir* x *por* f^{-1}

b) $f(x) = 7 - 5x$

$y = 7 - 5x$ *cambiar* $f(x)$ *por* y

$5x = -y + 7$ *despejar para* x

$x = \frac{-y+7}{5}$

$y = \frac{-x+7}{5}$ *cambiar* x *por* y

$f^{-1}(x) = \frac{-y+7}{5}$ *sustituir* $f(x)$ *por* f^{-1}

c) $g(x) = \sqrt{x}$

$y = \sqrt{x}$ *cambiar* $f(x)$ *por* y

$y^2 = x$ *despejar para* x

$x = y^2$

$y = x^2$ *cambiar* x *por* y

$g^{-1}(x) = x^2$ *sustituir* $f(x)$ *por* f^{-1}

d) $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{x^5-2}}{\boldsymbol{2}}$

$$y = \frac{x^5 - 2}{2}$$

$$2y = x^5 - 2$$

$$2y + 2 = x^5$$

$$x^5 = 2y + 2$$

$$x = (2y + 2)^{\frac{1}{5}}$$

$$y = (2y + 2)^{\frac{1}{5}}$$

$$h^{-1} = (2y + 2)^{\frac{1}{5}}$$

Ejercicios de práctica: Determina la inversa de cada función.

1) $f(x) = x + 3$

2) $f(x) = x^4 + 5$

3) $h\ (x) = 6x - 2$

4) $g(x) = \sqrt{x + 3}$

5) $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$

B. Funciones Polinómicas y Racionales

Lección 6: Polinomios y Funciones Polinómicas

Una expresión algebraica es un conjunto de cantidades numéricas y literales relacionadas entre sí por los signos de las operaciones aritméticas. Una colección significativa de números, variables y signos de operación.

Ejemplos de expresiones algebraicas

2p + 5

4a - 6

3x-9+2

No son expresiones:

-4 - · c   No tiene sentido la resta y multiplicación

3b + 4 = 9   El signo de "=" hace que no sea expresión. Esto es una oración matemática o ecuación.

¿Qué es un polinomio?

Un **polinomio** es una **expresión algebraica** de sumas, restas y multiplicaciones ordenadas hecha de variables, constantes y exponentes.
En álgebra, un polinomio puede tener más de una variable (x, y, z), constantes (números enteros o fracciones) y exponentes (que solo pueden ser números positivos enteros).

Para que una expresión sea un polinomio la o las variables no pueden ser exponentes, denominadores ni pueden estar en el lugar del radicando en una función radical. Estos forman una clase muy importante de funciones en matemáticas que están definidos en términos de sumas, restas y multiplicaciones de monomios. Aparecen en diversas áreas de la matemática y las ciencias naturales, usualmente en problemas de aplicación que involucran ecuaciones polinómicas, por lo que es de gran importancia contar con métodos para calcular y estimar (aproximar) sus raíces.

Los polinomios están formados por términos finitos. Cada término es una expresión que contiene uno o más de los tres elementos de los que están hechos: variables, constantes o exponentes. Por ejemplo: 5, 5x, 5xy, $5x^2$ son todos términos. Otra forma de identificar los términos es que se separan por sumas y restas.

Ejemplos:

$3x^2 + 6x - 2$ tiene 3 términos, estos son: $3x^2,\ 6x\ ,\ 2$

$8xyz + 1$ tiene 2 términos, estos son: $8xyz,\ 1$

Tipos de polinomios:

1. **Un monomio** es un término como *ax*, donde *a* representa una constante y se llama coeficiente y *x* representa una variable y se llama indeterminada.

2. **Un binomio** tiene la forma de la suma de dos monomios: por ejemplo, *ax* + *2bx.* Un trinomio es polinomio de tres términos: $ax^2 + 3bx + c$

3. **Polinomio** se usa para denotar a la suma de más de dos monomios, por ejemplo, *ax* + 2*bx* + 3*cx*

¿Que componen a un polinomio?

Un **término, como ya mencionamos,** es un grupo de variables y coeficientes separados por signos de suma y resta.

Ej. 4x + 2y
4x es un término
2y es un término

Términos Semejantes:

Un término es semejante a otro término si tiene la misma variable o variables con el mismo exponente o exponentes. Son los que tienen el mismo factor literal.

Ej. 2a + 3a son términos semejantes
3b + 4d no son términos semejantes
3c + 3a no son términos semejantes

Términos semejantes

3x + 4x + 2y - 9 + 6

7x + 2y - 3

Ejemplo:

$2xy + 4z - 9 + 2y - xy$

$2xy$ y $2y$ no son términos semejantes. Los **términos semejantes** tienen exactamente las mismas variables con los mismos exponentes. Los únicos términos semejantes en el polinomio son: $2xy$ y $-xy$

El **coeficiente** es el número que está siempre localizado antes de la variable; significa que el número está multiplicado por la variable.

Por ejemplo:

3a ; 3 es la coeficiente

-2c ; -2 es la coeficiente

x ; 1 es la coeficiente

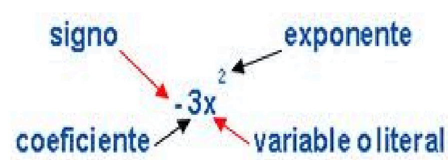
Funciones polinomiales

Las funciones polinomiales y su representación gráfica tienen gran importancia en la Matemática. Estas funciones son modelos que describen relaciones entre dos variables que intervienen en diversos problemas y/o fenómenos que provienen del mundo real. La función polinomial se llama si porque generalmente su expresión algebraica es un polinomio; su forma general es:

$$f(x)=a_nX^n+a_{n1-1}X^n-1+a_{n-2}X^n-2+\ldots+a_1+a_0$$

Una expresión algebraica se puede clasificar por dos características importantes:

- El número de términos que lo componen
- El grado de expresión.



Ejemplo: Determinar e número de términos y el grado del polinomio.

Supongamos el polinomio P(x) = $-5x + 8x^3 + 7 – 4x^2$. Este polinomio es de una variable, en este caso se trata de la variable *x*. Este polinomio consta de varios términos, que son los siguientes:

$$-5x,\quad 8x^3,\quad 7,\quad -4x^2$$

Seleccionemos de los cuatro términos aquel cuyo exponente es mayor, este término es: $8x^3$

Y ahora ¿cuál es el exponente? La respuesta es 3. Por lo tanto, P(x) es un polinomio de grado 3.

Si el polinomio en cuestión tiene más de una variable, entonces el grado puede ser:

- Absoluto
- En relación con una variable

El grado absoluto se encuentra como se explicó al comienzo: sumando los exponentes de cada término y seleccionando el mayor. En cambio, el grado del polinomio respecto a una de las variables o letras, es el valor más grande del exponente que tenga dicha letra. El punto quedará más claro con los ejemplos y ejercicios resueltos de las siguientes secciones.

Tabla 1. Ejemplos de polinomios y sus grados

Polinomio	**Grado**
$3x^4 + 5x^3 - 2x + 3$	4
$7x^3 - 2x^2 + 3x - 6$	3
6	0
$x - 1$	1
$x^5 - bx^4 + abx^3 + ab^3x^2$	6
$3x^3y^5 + 5x^2y^4 - 7xy^2 + 6$	8

Los dos últimos polinomios tienen más de una variable. De ellos se ha destacado en negrita el término que posee el mayor grado absoluto, para que el lector compruebe rápidamente el grado. Importante recordar, que cuando la variable no tiene exponente escrito, se entiende que dicho exponente es igual a 1.

Ejemplos

1. *f(x)* = *c* es un polinomio de grado 0 (si c es una constante).

2. *f(x)* = *ax* + *b* es un polinomio de grado 1, donde a y b son constantes.

3. *f(x)* = $ax^2 + bx + c$ es polinomio de grado 2.

Lección 7: DIVISIÓN SINTÉTICA

Permite dividir un polinomio p(x) entre el binomio x - k de una forma más rápida.

Explicaremos el método mediante un ejemplo:

Dividir $2x^4 - 5\,x^3 - 14x^2 - 37x - 30 \quad \div \quad x - 2$

Solución: Usando la división sintética, la preparación del ejercicio queda así:

El coeficiente de f(x)

k de x-k

2	2	-5	-14	47	-30

1. Baja el primer coeficiente.

2	2	-5	-14	47	-30
	↓				
	2				

*2. Multiplica el coeficiente por k y ponlo bajo el siguiente coeficiente.

2	2	-5	-14	47	-30
	↓	4			
	2				

3. Suma los dos números.

2	2	-5	-14	47	-30
	↓	4			
	2	-1			

4. Repite los Pasos 2 y 3 con el resto de los coeficientes.

2	2	-5	-14	47	-30
	↓	4	-2	-32	30
	2	-1	-16	15	0

Para "leer" la respuesta, usa los números como se muestra ahora:

2	2	-5	-14	47	-30
	↓	4	-2	-32	30
	2	-1	-16	15	0

coeficientes del polinomio factorizado

el último número es el residuo

Por lo tanto, 2 es una solución, ya que el residuo es cero. El polinomio factorizado es $2x^3 - x^2 - 16x + 15$. Debes tener presente que cuando dividimos sintéticamente por k, el polinomio "resultante" tiene un grado menos que el original. También podríamos escribir $(x-2)(2x^3-x^2-16x+15)=\ 2x^4-5\,x^3-14x^2-37x-30$.

Ejemplo: Determinar si $2x-5$ es un factor de $4x^4-9x^2-100$.

Si usamos la división sintética, el factor por el que vamos a dividir no está de la forma $(x-k)$. Por lo tanto, hay que escribir el factor $2x-5$ de la forma $(x-k)$. Esto se hace igualando el factor a cero (0) y resolviendo para x.

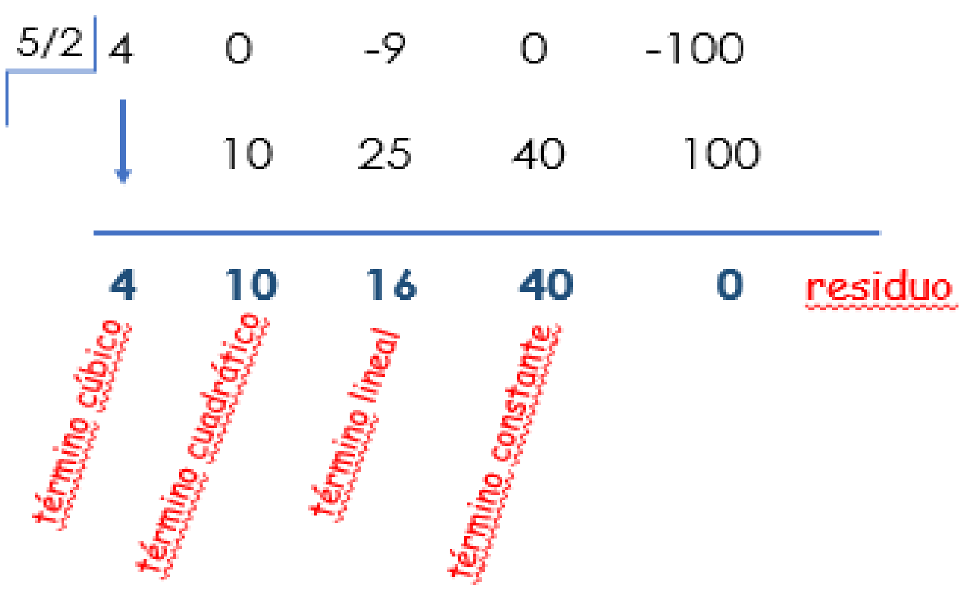
$2x-5=0$

$2x=5$

$x=\dfrac{5}{2}$

El factor por el que vamos a dividir es $(x-\frac{5}{2})$ y se dividirá por $\frac{5}{2}$.

Además, no se representan todos los términos en este polinomio. Cuando sucede esto, debes poner ceros como sustitutos. En este ejemplo, necesitamos ceros para el término x^3 y para el término x.



Como el residuo es cero, entonces $2x-5$ es factor de $4x^4-9x^2-100$.

EJERCICIOS DE PRACTICA

Usando la división sintética obtener el cociente y el residuo en cada caso:

1) $x^3 + 4x^2 + 7x - 2 \;\; \div x + 2$

2) $x^6 - \; x^4 + \; x^2 - 2 \; \div \;\; x - 1$

3) $2x^5 - 14x^3 + 8x^2 + 7 \;\; \div \;\; x + 3$

4) $4x^3 - 3x^2 + 3x + 7 \;\; \div \;\; x + \frac{1}{2}$

Lección 8: Teorema del residuo y del factor

<u>TEOREMA 1</u>: Si el polinomio $p(x)$ se divide por el binomio $x – k$, siendo "k" una constante independiente de "x" , el residuo es igual a $p(k)$.

<u>Ejemplo</u>: Sin realizar la división, calcular el residuo que se obtiene al dividir

$P(x) = x^4 + 5x^3 + 5x^2 – 4x – 7$ por $x + 3$

En efecto, según el teorema 1, el residuo es igual a $p(-3)$.

Así $p(-3) = (-3)^4 + 5\cdot(-3)^3 + 5\cdot(-3)^2 - 4\cdot(-3) – 7$

$= 81 – 135 + 45 + 12 – 7$

$= -4$

Luego el residuo de la división sería -4.

<u>TEOREMA 2</u> : Si en el polinomio $p(x)$ ocurre que $p(k) = 0$, entonces $x – k$ es un factor del polinomio $p(x)$.

<u>Ejemplo :</u>

Demostrar que $x – 5$ es un factor del polinomio $p(x) = x^3 – 8x^2 + 19x – 20$

En efecto, como $p(5) = 5^3 – 8 \cdot 5^2 + 19 \cdot 5 – 20$

$= 125 – 200 + 95 – 20$

$= 0$

entonces $x – 5$ es un factor del polinomio $x^3 – 8x^2 + 19x – 20$

EJERCICIOS DE PRÁCTICA

Usando el teorema del residuo y del factor calcula el residuo de la división e indica si el binomio dado es factor del polinomio:

1. $x - 1$; $p(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 1$

2. $x + 2$; $p(x) = x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 5x - 9$

3. $x + 3$; $p(x) = x^5 + 4x^4 - 7x^2 + 5x - 3$

4. $x - 2$; $p(x) = x^6 - 5x^5 + 3x^3 - x^2 + 7$

Lección 9: Teorema Fundamental del Álgebra

El **Teorema Fundamental del Algebra** (TFA) señala que todo polinomio a coeficientes complejos tiene una raíz compleja, es decir existe un número complejo donde el polinomio evalúa a cero. Una función polinomial tiene por lo menos un cero en el conjunto de números complejos .

> El teorema fundamental del álgebra establece que "**una función polinomial de grado *n* tiene exactamente *n* ceros en el conjunto de números complejos**, contando ceros repetidos ".

Ejemplo:

$g(x) = x^3 - 2x^2 + 9x - 18$

Igualar $g(x) = 0$ y factorizar para encontrar los ceros

$0 = x^3 - 2x^2 + 9x - 18$

$0 = x^2(x - 2) + 9(x - 2)$

$0 = (x^2 + 9)(x - 2)$

$0 = (x + 3i)(x - 3i)(x - 2)$

$x = 3i, \quad x = -3i, \quad x = 2$

$Los\ ceros\ de\ la\ función\ polinomial\ son: 2,\ 3i,\ -3i$

Lección 10: Teoremas sobre Raíces

El teorema de la raíz racional es un caso especial (para un solo factor lineal) del teorema de Gauss en la factorización de polinomios.

Recuerda lo que aprendiste sobre Funciones Cuadráticas: cada ecuación de segundo grado tiene dos soluciones. El grado de una ecuación cuadrática es 2, lo que nos lleva a la noción de que tiene 2 soluciones. *El grado siempre nos dirá el número máximo de soluciones que tiene un polinomio.* Las ecuaciones cuadráticas también tienen unas pocas posibilidades de soluciones diferentes; dos soluciones con números reales (la parábola pasa por el eje x dos veces), una solución con números reales (donde la solución es el vértice, conocido como raíz repetida) o dos soluciones imaginarias (donde el gráfico no toca en ningún momento el eje x).

Cuando se trata de soluciones para polinomios, todas estas opciones son posibles. Puede haber soluciones racionales, irracionales e imaginarias. *Las soluciones irracionales e imaginarias siempre aparecerán en pares.* Esto es debido al hecho de que, para encontrar estos tipos de soluciones, debes usar la Fórmula para Cuadráticos y el signo $\pm$ dará como resultado dos soluciones. En esta sección solo abordaremos soluciones con números reales.

Ahora, quizás te estés preguntando ¿Cómo encontramos todas estas soluciones? Una forma es usar el Teorema de la Raíz Racional.

Teorema de la Raíz Racional: Para un polinomio $(f)x = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_n + a_0$, donde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ son enteros, las raíces racionales se pueden determinar a partir de los factores de a_n y a_0. Si p es un factor de a_0 y q es un factor de a_n, entonces todos los factores racionales tendrán la forma de $\pm\frac{p}{q}$.

En otras palabras, los factores de la constante divididos por los factores del coeficiente principal producirán todas las soluciones racionales posibles para $f(x)$.

Raíces Racionales

Procedimiento para aplicar el teorema de las raíces racionales.

Ejemplo: $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$

Una raíz debe ser $\frac{p}{q}$, donde p es un factor de 6, es decir, ±1, ±2, ±3, ±6, y q es un factor de 1, esto es: +1 o -1.

Por lo tanto, las raíces $\frac{p}{q}$ pueden ser $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{6}{1}$, $-\frac{1}{1}$, $-\frac{2}{1}$, $-\frac{3}{1}$, $-\frac{6}{1}$. El paso siguiente es probar una a una las raíces haciendo la división correspondiente (se recomienda la división sintética) usando el teorema del residuo y teorema del factor nos permite encontrar las raíces y factores del polinomio con más facilidad.

EJERCICIOS DE PRÁCTICA

1) Encontrar las raíces de la función $f(x) = 4x^3 - 5x^2 - 7x + 2$

   p es un factor de 2, es decir: ___________________________

   q es un factor de 4, es decir:____________________________

   Por lo tanto las posibles raíces son: _____________________________________

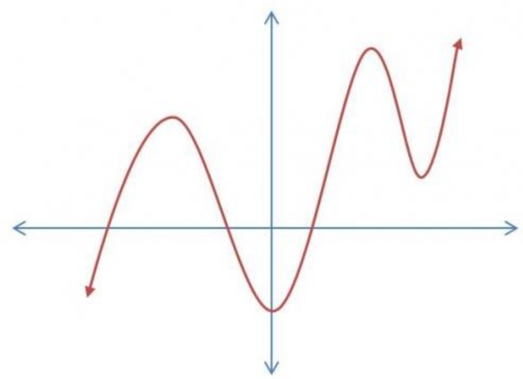
2) Para cada uno de los siguientes ejercicios encuentra únicamente todos los posibles ceros o raíces del polinomio dado.

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$$

$$f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 11x^2 + 4x + 12$$

Lección 11 Gráfica Funciones Polinómicas

La **gráfica** de una **función polinómica** es una curva suave y continua. Una curva continua es aquella que no presenta huecos, saltos o brincos.



Graficando funciones polinomiales

Para graficar cualquier función polinomial, puede iniciar encontrando los ceros reales de la función y el comportamiento final de la función.

Los pasos involucrados para graficar funciones polinomiales son:

1. Predecir el comportamiento final de la función.

2. Encuentre los ceros reales de la función. Compruebe si es posible de reescribir la función en forma factorizada para encontrar los ceros. De otra manera, use la regla de los signos de Descartes para identificar el número posible de ceros reales.

3. Haga una tabla de valores para encontrar varios puntos.

4. Grafique los puntos y dibuje una curva continua suave para conectar los puntos.

5. Asegúrese que la gráfica sigue el comportamiento final como se predijo en pasos anteriores.

https://youtu.be/o1K_NW35lll

https://youtu.be/HCEBVlkQBPk

Ejemplo :

Grafique la función polinomial $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$

Prediga el comportamiento final de la función.

El grado de la función polinomial es impar y el coeficiente principal es positivo.

$f(x) \to -\infty$, como $x \to -\infty$

$f(x) \to +\infty$, como $x \to +\infty$

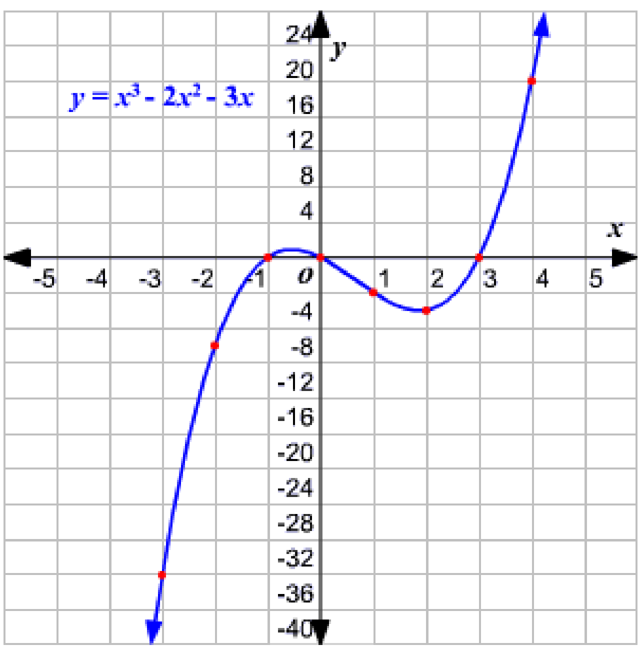
El grado del polinomio es 3 y lo que significa que hay 3 ceros para las funciones.

La función puede factorizarse como $x(x+1)(x-3)$. Así, los ceros de las funciones son $x = -1$, 0 y 3.

Haga una tabla de valores para encontrar varios puntos.

x	$f(x)$
-3	-36
-2	-10
-1	0
0	0
1	-4
2	-6
3	0
4	20

Grafique los puntos y dibuje una curva continua suave para conectar los puntos.



Actividades de aprendizaje

Posibles tamaños de alfombras

Los estudiantes explorarán si es posible factorizar polinomios al repasar primero si es posible factorizar números enteros, al considerar las áreas potenciales de alfombras con longitudes de lados que sean enteros, sin incluir el 1, y extendiéndolo a los polinomios. Comienza por algo sencillo: dales a los estudiantes áreas potenciales de alfombras (ej.: 24 pies cuadrados) y pregúntales: ¿cuántos conjuntos de dimensiones tiene esta área si los lados tienen que ser enteros mayores de 1 pie?

Ej. 2 por 12, 3 por 8, 4 por 6. Dales a los estudiantes unos cuantos números para que lo intenten, algunos con más factores que otros. Incluye un primo. Solicita a los estudiantes que hagan el modelo de unos cuantos ejemplos con modelos de área, o colocando puntos en un papel cuadriculado. No utilices números grandes para esto, o si no la actividad se hace un poco tediosa.

Refiriéndote a su experiencia pasada con modelos de área y la propiedad distributiva, reta a los estudiantes a que intenten resolver el problema de multiplicación del que se obtendrían algunos trinomios simples con términos positivos. Comienza con trinomios simples que se puedan factorizar (ej.: $x^2 + 5x + 6$). Una vez hayan logrado sacar unos cuantos, dales un polinomio que sea primo sobre los números racionales (ej.: $x^2 + 6x + 7$). Buenos ejemplos para esta exploración: debes darles una "b" lo suficientemente grande para proveer unos cuantos escenarios con el arreglo de los cuadritos rectangulares, pero no tan grande que resulte abrumador. Además, un buen valor de "c" debe ser lo suficientemente grande para que se produzca un remanente en alguno(s) arreglo(s), pero lo suficientemente pequeño como para no cerrar la brecha en los otros (fuente: www.curriculumframer.com)

Las funciones racionales y sus gráficas

Delega gradualmente la responsabilidad a los estudiantes usando el modelo “Yo lo hago, nosotros lo hacemos, tú lo haces” para la parte 1. Utiliza los ejemplos $f(x) = \frac{x-2}{x+3}$ y $f(x) = \frac{x+2}{x^2-16}$ como modelos de expectativas para la parte de "Yo hago". En esta actividad de aprendizaje, los estudiantes hallarán el dominio, los ceros, las asíntotas y las intercepciones de las funciones racionales. En la parte 2, describirán la simetría de la función y explorarán qué tendría que ocurrir para que las funciones tengan discontinuidades. (ver anejo: PC.3 Actividad de aprendizaje - Las funciones racionales y sus gráficas).

(Fuente: http://doe.louisiana.gov/topics/comprehensive_curriculum.html "Advanced Math Pre Calculus" "02 AM_PreCalc_BLMs.pdf")

Unidad 4: Función Exponencial y Función Logarítmica

Lección 1: Función exponencial y sus propiedades

Las funciones exponenciales son funciones en las cuales la variable independiente está en la posición del exponente. Cuando te hablaron por primera vez de potencia aprendiste que en una expresión como 2^5, al 2 le llamamos la base y al 5 le llamamos el exponente. Si utilizas este concepto aprendido previamente, puedes definir la función exponencial de la siguiente forma.

Sea *x* cualquier número real. La función exponencial base *b* es una función de la forma $f(x) = b^x$, donde *b* es un número real positivo diferente de 0. Esto es *b* > 0 y *b* ≠ 1.

EJEMPLOS DE FUNCIONES EXPONENCIALES:

Recuerda

$b \rightarrow$ base

1) $f(x) = 3^x$

2) $g(x) = 2^x + 5$

3) $F(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

4) $G(x) = e^x$

Es importante distinguir entre la función potencia y la función exponencial. La función potencia es una función polinomial donde la base es una variable y el exponente es una constante. En una función exponencial, la base es una constante y el exponente es una variable.

Si tienes la función $f(x) = x^2$, se dice que es una función polinomial de grado 2. Por otro lado, si tienes la función $g(x) = 2^x$, se dice que es una función exponencial de base 2. A las funciones exponenciales se les llama de acuerdo al valor de la base.

Antes de estudiar la función exponencial, debes repasar las propiedades o leyes de los exponentes. La familiaridad con las siguientes reglas es esencial para nuestro trabajo con exponentes y bases. En la tabla las bases *a* y *b* son números reales, y los exponentes *m* y *n* son enteros. Dale un vistazo a cada una de las propiedades y sus ejemplos.

Propiedades o leyes de los exponentes

Propiedad	**Ejemplo**	**Propiedad**	**Ejemplo**
Exponente cero 1) $a^0 = 1$	$2^0 = 1$	Potencia de un cociente 7) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$
Exponente negativo 2) $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$	$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$	Exponente negativo de un cociente 8) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m = \frac{b^m}{a^m}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{3^4}{2^4} = \frac{81}{16}$
Producto de potencias 3) $a^m a^n = a^{m+n}$	$2^3 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$	9) $\frac{a^{-m}}{b^{-n}} = \frac{b^n}{a^m}$	$\frac{2^{-5}}{3^{-2}} = \frac{3^2}{2^5} = \frac{9}{32}$
Cociente de potencias 4) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{2^5}{2^2} = 2^{5-2} = 2^3 = 8$	10) $a^m = a^n$, si y solo si, $m = n$	$2^m = 2^3$ $m = 3$

<table>
<tr>
<td>Potencia de una potencia

5) $(a^m)^n = a^{mn}$</td>
<td>$(2^3)^4 = 2^{3(4)} = 2^{12}$
$= 4{,}096$</td>
<td rowspan="2">11) Dado que $m \neq 0$, entonces $a^m = b^m$, si y solo si, $a = b$</td>
<td rowspan="2">$a^3 = 2^3$

$a = 2$</td>
</tr>
<tr>
<td>Potencia de un producto

6) $(ab)^m = a^m b^m$</td>
<td>$(2 \cdot 3)^2 = 2^2 3^2$
$= 4(9) = 36$</td>
</tr>
</table>

Recuerda

Repasar las propiedades o leyes de los exponentes te ayuda entender mejor la función exponencial.

Ahora vas a repasar las propiedades con expresiones algebraicas.

EJEMPLOS:

- Todo número elevado a cero es igual a uno.
  1) $x^0 = 1$

- Para cambiar un exponente negativo a exponente positivo se escribe la expresión como una fracción cuyo numerador es uno.
  2) $x^{-4} = \frac{1}{x^4}$

- Cuando multiplicas potencias con las bases iguales se restan los exponentes.
  3) $x^8 x^{-3} = x^{8+-3} = x^5$

- Cuando divides potencias con las bases iguales se restan los exponentes.
  4) $\frac{x^{10}}{x^7} = x^{10-7} = x^3$

- Cuando tienes una potencia de otra potencia se multiplican los exponentes.
  5) $(x^2)^5 = x^{2 \cdot 5} = x^{10}$

- Cuando tienes la potencia de un producto con bases diferentes, cada base se eleva al exponente.
  6) $(xy)^{17} = x^{17}y^{17}$

- Cuando tienes la potencia de un cociente con bases diferentes, cada base se eleva al exponente.
  7) $\left(\frac{x}{y}\right)^6 = \frac{x^6}{y^6}$

- Cuando tienes la potencia negativa de un cociente con bases diferentes, se cambia al recíproco para que el exponente sea positivo. Luego cada base se eleva al exponente.
  8) $\left(\frac{x}{y}\right)^{-21} = \left(\frac{y}{x}\right)^{21} = \frac{y^{21}}{x^{21}}$

- Cuando tienes el cociente de potencias con bases diferentes y exponentes negativos, se cambia al recíproco para que el exponente sea positivo.
  9) $\frac{x^{-9}}{y^{-2}} = \frac{y^2}{x^9}$

- Cuando tienes una ecuación con bases iguales, se igualan los exponentes.
  10) $3^x = 3^2$

  $x = 2$

- Cuando tienes una ecuación con exponentes iguales, se igualan las bases.
  11) $x^{43} = 10^{43}$

  $x = 10$

Ejercicio de práctica 1

Usa las propiedades o leyes de los exponentes para simplificar cada expresión.

1) $(xy^4)(x^2y^3)$

2) $(3a^2b)^2$

3) $(2a^4b)^3[(-2b)^3]^2$

4) $\left(\frac{5}{6}x\right)(12y^3)$

5) $\frac{(-5m)^4}{(-25m^2)^2}$

6) $\left(\frac{-3a^2b^4}{4a^{-3}c^0}\right)^2$

Puedes corroborar tus respuestas al final del módulo.

"La práctica hace la perfección."

Evaluar expresiones que contienen exponentes es igual que evaluar cualquier otra expresión algebraica. Sustituyes el valor de la variable en la expresión y simplificas.

Recuerda

Puedes usar PEMDAS para recordar el orden en el que debes evaluar una expresión. Primero, evalúa lo que está dentro de Paréntesis. Luego, busca Exponentes, seguido de Multiplicación y División (de izquierda a derecha), y finalmente, Adición y Sustracción (también de izquierda a derecha).

EJEMPLO: Si $x = -5$ y $x = 4$, entonces $2^x =$

$a)\ 2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

$b)\ 2^4 = 16$

- En el primer ejemplo se sustituyó el valor dado de *x*. Como el exponente es negativo se cambió a positivo escribiendo la expresión como una fracción con 1 en el numerador y se resolvió la potencia.

- En el segundo ejemplo se sustituyó el valor dado de *x* y se resolvió la potencia.

Ejercicio de práctica 2

Evalúa la siguiente expresión exponencial para $x = -3$ y $x = 2$.

1) 3^x

2) 5^x

3) $-6 + 4^x$

4) $8 + 3^x$

5) $7 \cdot 2^x$

6) $9 \cdot 4^x$

Puedes corroborar tus respuestas al final del módulo.

Observa cómo se comporta una función exponencial.

Si la comprensión del contenido de esta lección se te hace difícil, debes solicitar ayuda de tus familiares, amigos o maestros.

Nombre: ____________________________ Fecha: ___________________________

Grupo: ________ Fundamentos de Preparación al Cálculo

Tarea #1

Evalúe la siguiente expresión exponencial para el valor indicado. Realice el procedimiento **completo**. (20 puntos)

(2 puntos)

1) 6^x para $x = 2$

(2 puntos)

2) 8^x para $x = 3$

(6 puntos)

3) $3 - 7^x$ para $x = -2$

(3 puntos)

4) $-1 - 9^x$ para $x = 0$

(3 puntos)

5) $20 \cdot 5^x$ para $x = -1$

(4 puntos)

6) $2 \cdot 3^x$ para $x = -4$

EJEMPLO: $f(x) = 2^x$

Esta función exponencial es de base 2. Si se sustituye varios valores en la *x*, observa cómo se comporta la función. Con cada valor, la función aumenta rápidamente y su curva va creciendo.

$$f(4) = 2^4 = 16$$

$$f(8) = 2^8 = 256$$

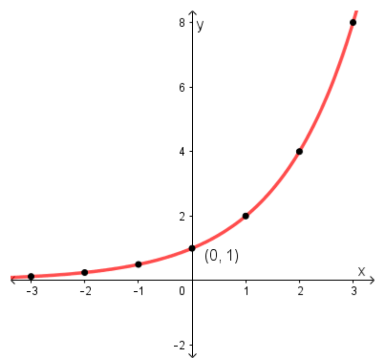
$$f(16) = 2^{16} = 65{,}536$$

$$f(32) = 2^{32} = 4{,}294{,}967{,}296$$

A continuación se presenta la gráfica y las propiedades de la función.

x	*y*
-2	$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0.25$
-1	$2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2} = 0.5$
0	$2^0 = 1$
1	$2^1 = 2$
2	$2^2 = 4$

$f(x) = 2^x$



- ❖ Si observas la gráfica de izquierda a derecha, su dominio son todos los números reales porque la gráfica se extiende a la izquierda hacia el infinito y va creciendo a la derecha también hacia el infinito.
- ❖ Si observas de abajo hacia arriba, su alcance o campo de valores son los números mayores que cero extendiéndose hacia el infinito porque la gráfica tiene asíntota horizontal en cero. Esto significa que esta gráfica nunca toca el eje *x* porque el mismo eje es la asíntota horizontal. A su vez, la gráfica no tiene interceptos en este eje.
- ❖ La gráfica tiene intercepto en el eje *y* en 1 porque toca el eje en el punto (0, 1).
- ❖ La función no es par ni impar porque no es simétrica.

La siguiente tabla resume todas las características o propiedades antes mencionadas.

Propiedades	$f(x) = 2^x$
Dominio	$(-\infty, \infty) = R$
Alcance	$\{y \mid y > 0\} = (0, \infty)$
Asíntota horizontal	$y = 0$
Intercepto en el eje x	No tiene
Intercepto en el eje y	$y = 1 \rightarrow (0, 1)$
Creciente	$(-\infty, \infty)$
Par o impar	No es par ni impar

Nombre: ______________________________ Fecha: _____________________________

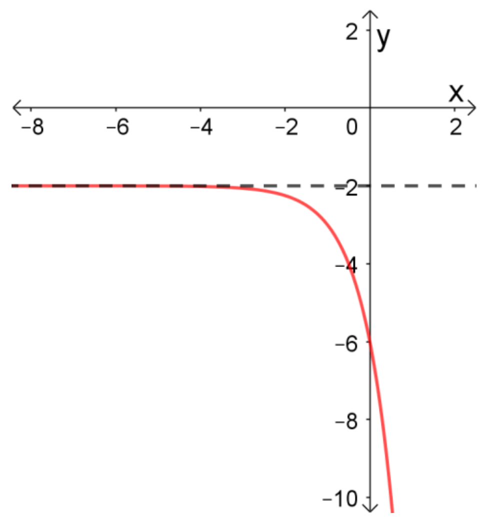
Grupo: _________ Fundamentos de Preparación al Cálculo

Tarea #2

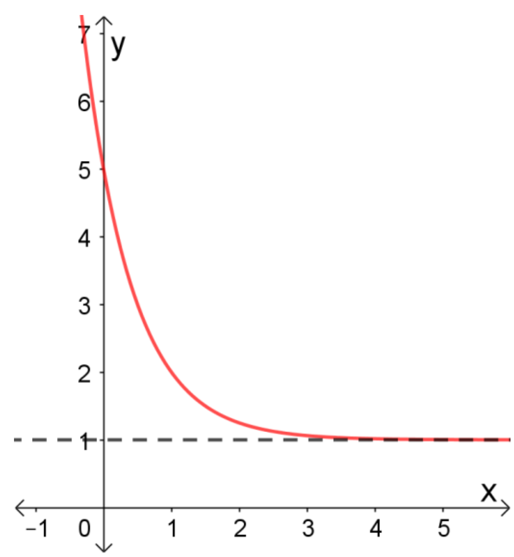
Complete la siguiente tabla de las propiedades de cada función. (16 puntos)

1) $f(x) = -4^{x+1} - 2$

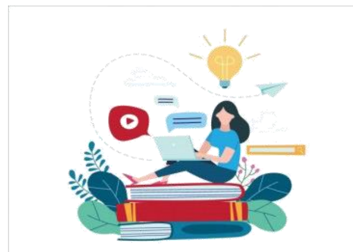
Propiedades	$f(x) = -4^{x+1} - 2$
Dominio	
Alcance	
Asíntota horizontal	
Asíntota vertical	
Intercepto en el eje *x*	
Intercepto en el eje *y*	
Creciente o decreciente	
Par o impar	



2) $f(x) = 4^{-(x-1)} + 1$



Propiedades	$f(x) = 4^{-(x-1)} + 1$
Dominio	
Alcance	
Asíntota horizontal	
Asíntota vertical	
Intercepto en el eje *x*	
Intercepto en el eje *y*	
Creciente o decreciente	
Par o impar	



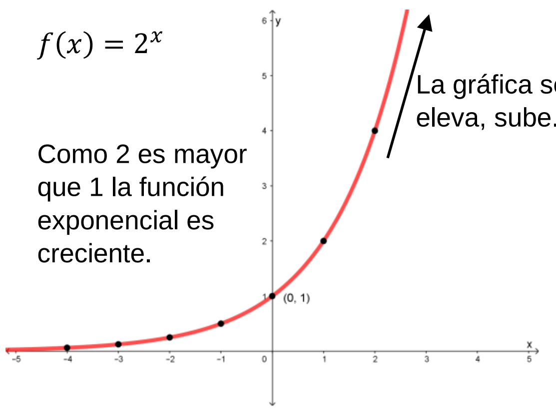
Anteriormente repasaste cómo se comporta una función exponencial. Ahora vas a identificar cuándo una función exponencial crece o decrece.

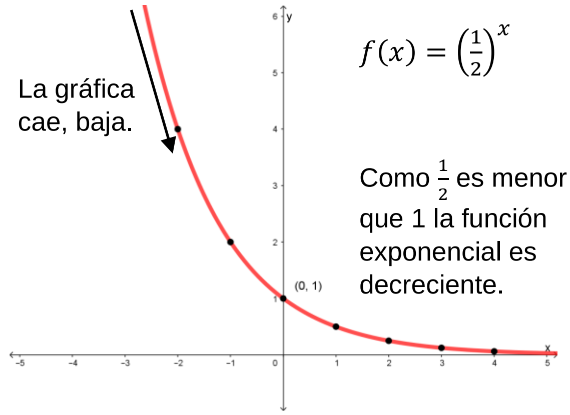
La función exponencial madre es $f(x) = b^x$. Si $b > 1$ es una función de crecimiento exponencial; mientras que si $0 < b < 1$ es una función de decrecimiento exponencial.

Observa que la gráfica de f puede tener las siguientes formas:

Gráfica de una función de crecimiento exponencial

Gráfica de una función de decrecimiento exponencial





$f(x) = b^x$ para $b > 1$

$f(x) = b^x$ para $0 < b < 1$

Recuerda

Cuando la base es un número mayor que cero la función exponencial crece. Por otro lado, si la base es un número entre cero y uno la función exponencial decrece.

Ejercicio de práctica 3

Menciona si la función representa crecimiento o decrecimiento exponencial.

1) $f(x) = 8^x$

2) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

3) $f(x) = \left(\frac{6}{7}\right)^x$

4) $f(x) = \left(\frac{9}{4}\right)^x$

5) $f(x) = (0.75)^x$

6) $f(x) = (2.5)^x$

Puedes corroborar tus respuestas al final del módulo.

Nombre: ___________________________ Fecha: __________________________

Grupo: ________ Fundamentos de Preparación al Cálculo

Tarea #3

Mencione si la función representa crecimiento o decrecimiento exponencial. (10 puntos)

1) $f(x) = 5^x$

2) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

3) $f(x) = \left(\frac{11}{4}\right)^x$

4) $f(x) = \left(\frac{5}{2}\right)^x$

5) $f(x) = (0.25)^x$

6) $f(x) = (1.6)^x$

7) $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

8) $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

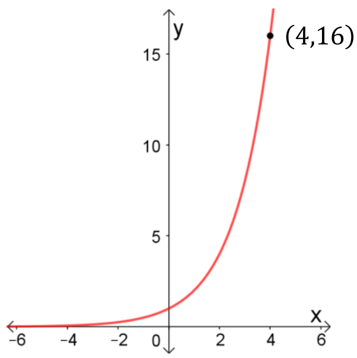
9) $f(x) = (0.3)^x$

10) $f(x) = (3.5)^x$

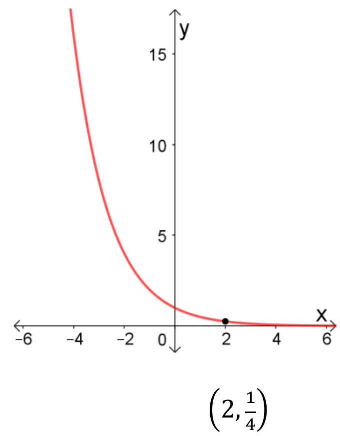
Dado un punto se puede hallar la función exponencial en la forma $f(x) = b^x$ que se representa en una gráfica. Revisa las siguientes gráficas.

EJEMPLOS:

1)



2)



1) $f(4) = b^4 = 16,$ por lo tanto la base es 2. Entonces $f(x) = 2^x$

- Como el valor de *x* en el par ordenado es 4, 2 es el único número que se eleva a cuatro y se obtiene como resultado 16.

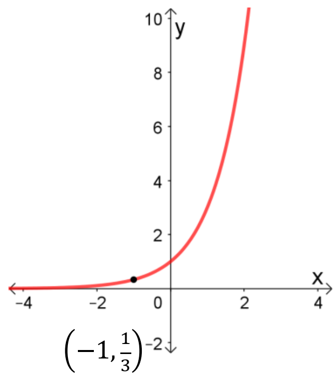
2) $f(2) = b^2 = \frac{1}{4},$ por lo tanto la base de es $\frac{1}{2}$. Entonces $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

- Como el valor de *x* en el par ordenado es 2, $\frac{1}{2}$ es el único número que se eleva al cuadrado y se obtiene como resultado $\frac{1}{4}$.

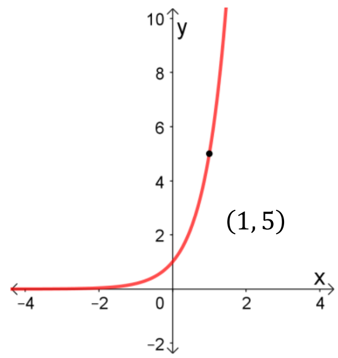
Ejercicio de práctica 4

Dada la gráfica, encuentra la función exponencial $f(x) = b^x$ correspondiente.

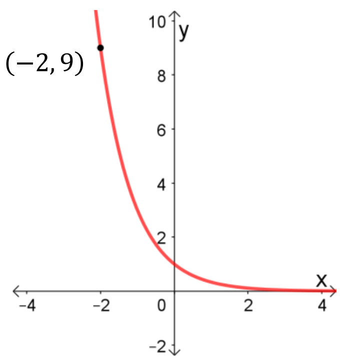
1)



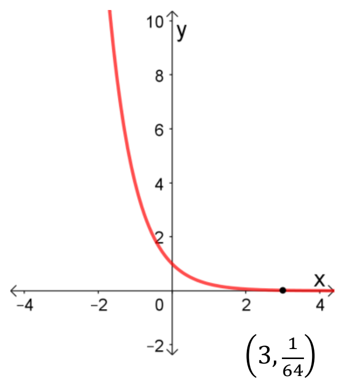
2)



3)



4)



Dada la función exponencial se puede hacer la representación gráfica de la misma siguiendo los siguientes pasos.

1) Identifica si la gráfica es creciente o decreciente para saber cómo es su comportamiento.

2) Haz una tabla de valores.

3) En un papel cuadriculado dibuja los ejes del plano e identifícalos.

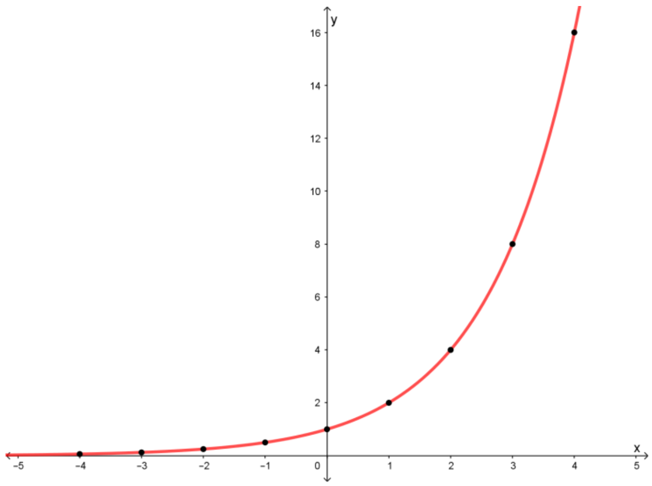
4) Marca los puntos de la tabla en el plano.

5) Traza una curva suave que pase por los puntos marcados.

EJEMPLOS

1) $f(x) = 2^x$

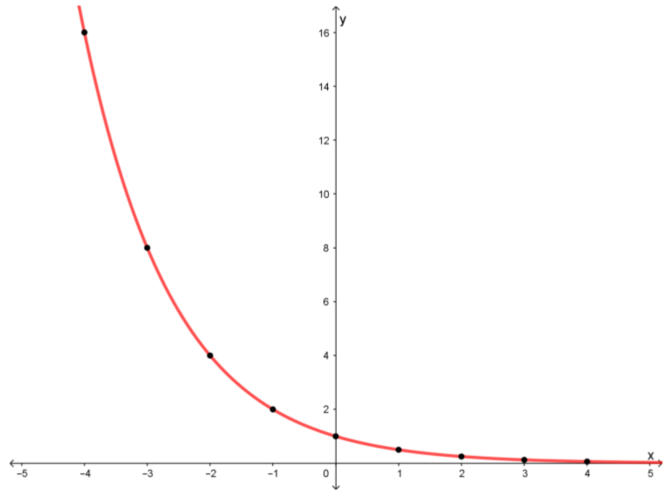
x	y
-4	$2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$
-3	$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0.125$
-2	$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0.25$
-1	$2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2} = 0.5$
0	$2^0 = 1$
1	$2^1 = 2$
2	$2^2 = 4$
3	$2^3 = 8$
4	$2^4 = 16$



2) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

x	y
-4	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 2^4 = 16$
-3	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8$
-2	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^2 = 4$
-1	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2^1 = 2$
0	$\left(\frac{1}{2}\right)^{0} = 2^0 = 1$
1	$\left(\frac{1}{2}\right)^{1} = \frac{1}{2} = 0.5$

2	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1^2}{2^2} = \frac{1}{4} = 0.25$
3	$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1^3}{2^3} = \frac{1}{8} = 0.125$
4	$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1^4}{2^4} = \frac{1}{16} = 0.0625$



Ejercicio de práctica 5

Indica si la función exponencial es creciente o decreciente. Luego traza la gráfica que represente la función.

1) $f(x) = 0.75^x$

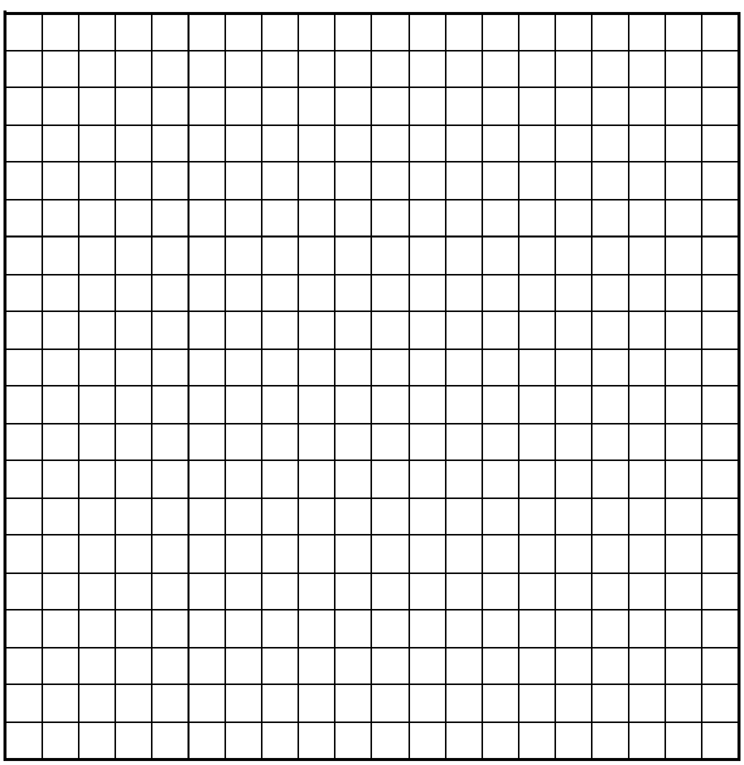
2) $f(x) = 4^x$

3) $f(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^x$

4) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

5) $f(x) = 3^x$

6) $f(x) = (1.5)^x$



http://www.imagui.com/a/hoja-cuadriculada-png-czEa6x7do

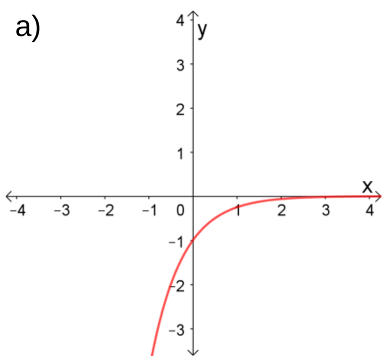
Ejercicio de práctica 6

Parea la función exponencial con su gráfica correspondiente.

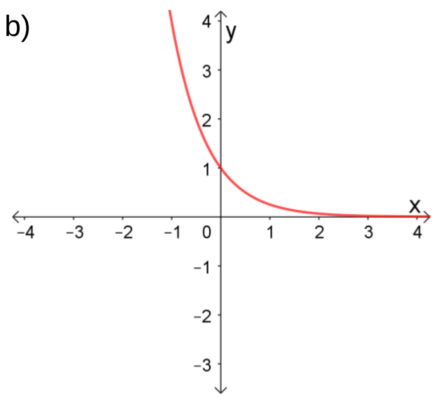
______1) $f(x) = 4^{x}$ 　　　　______2) $f(x) = 4^{-x}$

______3) $f(x) = -4^{x}$ 　　　　______4) $f(x) = -4^{-x}$

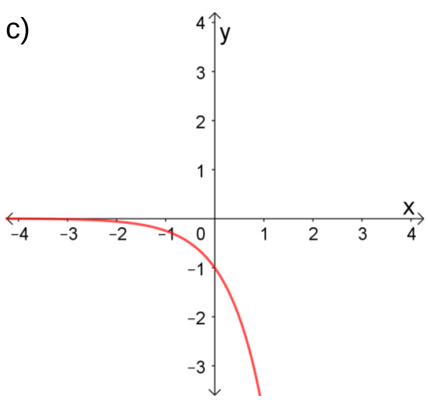
a)



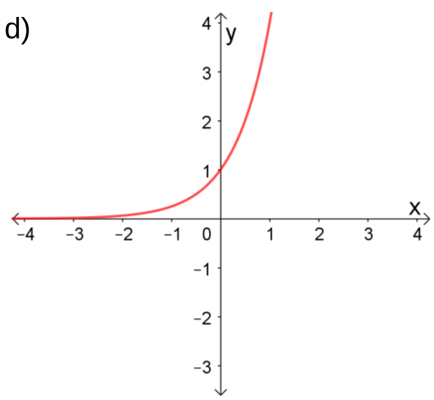
b)



c)



d)



Puedes corroborar tus respuestas al final del módulo.

Nombre: ___________________________ Fecha: __________________________

Grupo: ________ Fundamentos de Preparación al Cálculo

Tarea #4

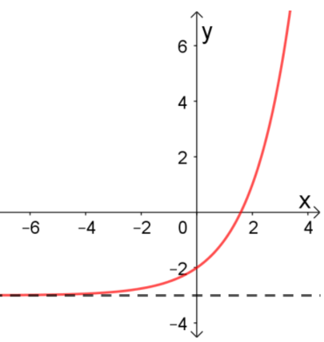
Parea la función exponencial con su gráfica correspondiente. (6 puntos)

_____1) $f(x) = 2^{x}$ _____2) $f(x) = 2^{-x}$

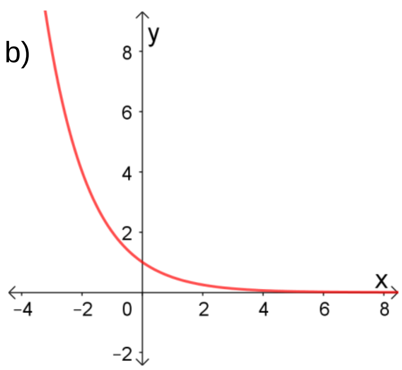
_____3) $f(x) = -2^{x}$ _____4) $f(x) = -2^{-x}$

_____5) $f(x) = 2^{x+3}$ _____6) $f(x) = 2^{x} - 3$

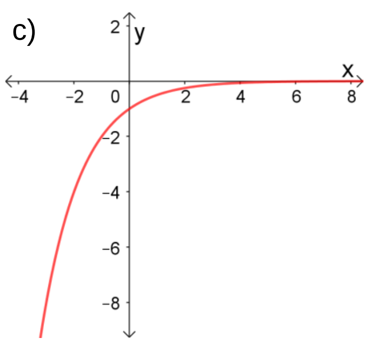
a)



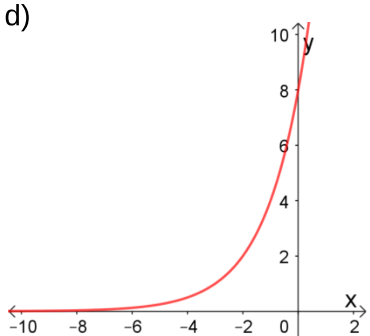
b)



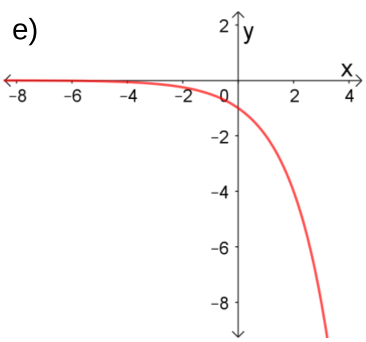
c)



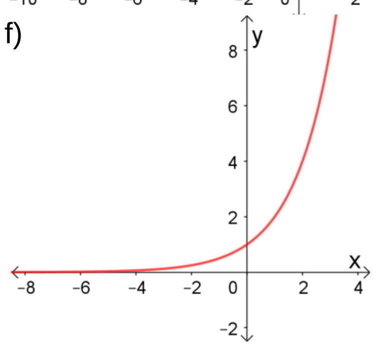
d)



e)



f)



Lección 2: Función Exponencial Natural

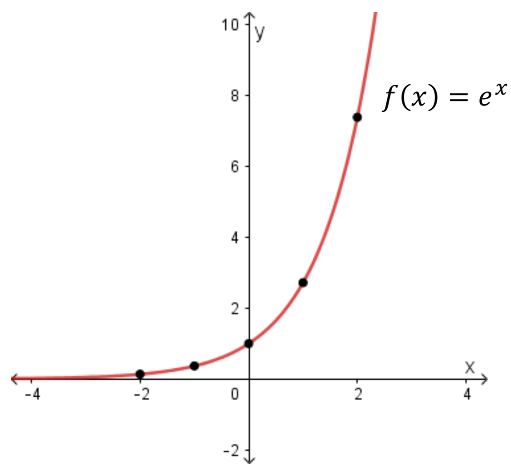
La función exponencial natural lleva por base la letra e. Se dice que e es un número trascendente porque al igual que π es un número irracional que no es solución de ninguna ecuación algebraica. Este número se representa con la letra e, en honor al matemático suizo Leonhard Euler. Esta base es muy importante porque se usa para modelar situaciones que ocurren en la naturaleza como el crecimiento poblacional, interés compuesto continuo, entre otros fenómenos.

Leonhard Euler

Sea x cualquier número real. La función exponencial base e es una función de la forma $f(x) = e^x$, donde e es un número irracional. Esto es que $e \approx 2.71828$.

EJEMPLO: $f(x) = e^x$

x	y
-2	$e^{-2} = \frac{1}{e^2} = 0.14$
-1	$e^{-1} = \frac{1}{e^1} = 0.37$
0	$e^0 = 1$
1	$e^1 = 2.72$
2	$e^2 = 7.39$



- Para hallar una equivalencia de la expresión exponencial con base natural puedes usar una calculadora.

EJEMPLOS

1) $e^3 = 20.08554$

2) $2e^{-0.53} = 1.17721$

3) $e^{4.8} = 121.51042$

Ejercicio de práctica 7

Evalúa cada expresión exponencial. Utiliza la calculadora para redondear a cinco lugares decimales.

1) e^4

2) $2.04e^8$

3) $\frac{1}{e^{-0.5}}$

4) e^{-2}

5) $\frac{6}{e^5}$

6) e^{-7}

❖ Para simplificar una expresión numérica que tiene base natural también usa las propiedades o leyes de los exponentes.

Ejercicio de práctica 8

Simplifica cada expresión exponencial con base natural usando las leyes de los exponentes.

1) $e^2 \cdot e^9$

2) $\frac{3e^{15}}{27e^{-7}}$

3) $(2e^4)^{11}$

4) $e^{18} \cdot e^{-4} \cdot e^{10}$

5) $\frac{56e^{-23}}{7e^{-18}}$

6) $(6e^{-2x})^7$

Puedes corroborar tus respuestas al final del módulo.

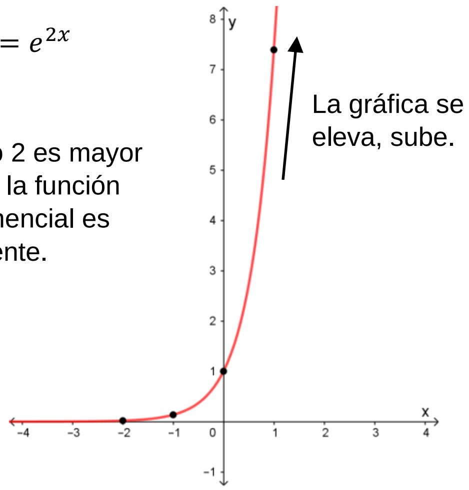
La función exponencial de base natural de la forma $f(x) = ae^{rx}$ también representa crecimiento o decrecimiento.

Cuando $a > 0$ y $r > 0$, la función representa crecimiento exponencial.

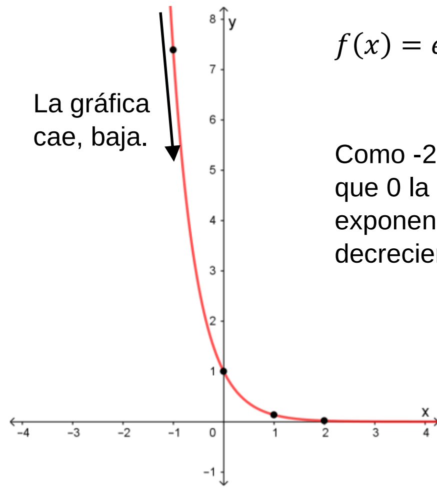
Cuando $a > 0$ y $r < 0$, la función representa decrecimiento exponencial.

$f(x) = e^{2x}$

Como 2 es mayor que 0 la función exponencial es creciente.



$f(x) = ae^{rx}$ para $r > 0$



$f(x) = e^{-2x}$

Como -2 es menor que 0 la función exponencial es decreciente.

$f(x) = ae^{rx}$ para $r < 0$

Ejercicio de práctica 9

Mencione si la función representa crecimiento o decrecimiento exponencial.

1) $f(x) = e^{-0.1x}$

2) $f(x) = 6e^{2x}$

3) $f(x) = 0.25e^{x}$

4) $f(x) = \frac{1}{5}e^{3x}$

5) $f(x) = \frac{1}{4}e^{-x}$

6) $f(x) = 2.5e^{-0.7x}$

Puedes corroborar tus respuestas al final del módulo.

Nombre: ____________________________ Fecha: ___________________________

Grupo: ________ Fundamentos de Preparación al Cálculo

Tarea #5

Mencione si la función representa crecimiento o decrecimiento exponencial. (10 puntos)

1) $f(x) = \frac{1}{2}e^{x}$

2) $f(x) = e^{-5x}$

3) $f(x) = 4e^{x}$

4) $f(x) = \frac{1}{3}e^{-x}$

5) $f(x) = 1.5e^{x}$

6) $f(x) = 0.75e^{7x}$

7) $f(x) = 3e^{0.5x}$

8) $f(x) = 0.2e^{-3x}$

9) $f(x) = 2.25e^{-0.75x}$

10) $f(x) = 5e^{6x}$

Ejercicio de práctica 10

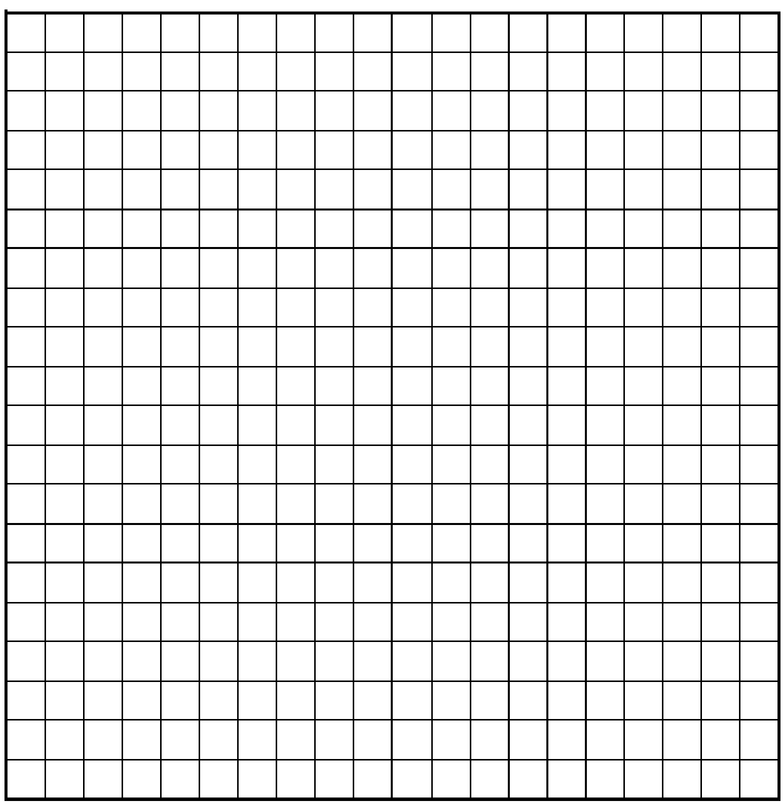
Completa la tabla de valores, redondeados a dos lugares decimales, y trace la gráfica de la función.

1)

x	$f(x) = 3e^{x}$
-2	
-1	
-0.5	
0	
0.5	
1	
2	

2)

x	$f(x) = 2e^{-0.5x}$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	



http://www.imagui.com/a/hoja-cuadriculada-png-czEa6x7do

Lección 3: Ecuaciones Exponenciales

Las ecuaciones exponenciales son ecuaciones en las cuales sus exponentes son expresiones con variables. Cuando tenemos una ecuación con exponentes, se verifica si se puede cambiar ambos lados de la igualdad a bases iguales para luego aplicar las propiedades correspondientes y así determinar el valor de la variable.

EJEMPLOS

1) $2^x = 8$

$2^x = 2^3$

$x = 3$

2) $3^x = \frac{1}{3}$

$3^x = 3^{-1}$

$x = -1$

3) $e^x \cdot \frac{1}{e^{-2x}} = e^{4-x}$

$e^x \cdot e^{2x} = e^{4-x}$

$e^{3x} = e^{4-x}$

$3x = 4 - x$

$3x + x = 4$

$\frac{4x}{4} = \frac{4}{4}$

$x = 1$

4) $2^x = \left(\frac{1}{32}\right)^{x+2}$

$2^x = \left(\frac{1}{2^5}\right)^{x+2}$

$2^x = (2^{-5})^{x+2}$

$2^x = 2^{-5x-10}$

$x = -5x - 10$

$5x + x = -10$

$\frac{6x}{6} = -\frac{10}{6}$

$x = -\frac{5}{3}$

- En la primera ecuación se igualaron los exponentes porque las bases son iguales.
- En la segunda ecuación se igualaron las bases porque los exponentes son iguales.
- En la tercera ecuación se cambió la fracción a exponente negativo para tener las bases son iguales. Finalmente se igualan los exponentes.
- En la cuarta ecuación se cambió el denominador para tener base dos. La fracción se cambió a exponente negativo. Se multiplicaron los exponentes. Se igualaron los exponentes. Finalmente se resuelve la ecuación.

Recuerda

En algunas ocasiones, al igualar las bases o los exponentes tendrás que resolver ecuaciones lineales y cuadráticas como has aprendido anteriormente. Además, debes aplicar las propiedades o leyes de los exponentes.

Ejercicio de práctica 11

Halla el valor de *x*.

1) $e^x = e^5$

2) $7^{3x+5} = 7^{1-x}$

3) $e^{2x} = e^{3x-1}$

4) $5^{x-3} = 25^{x-5}$

5) $6^{2x-6} = 36^{3x-5}$

6) $100^x = \left(\frac{1}{10}\right)^{x-3}$

7) $8^x = \frac{1}{2}$

8) $e^x = \frac{e^{4-2x}}{e^{10}}$

9) $16^x = \frac{1}{4}$

10) $5^x = 125$

11) $3^x = 243$

12) $2^{3x-2} = 16$

13) $e^{10x} = \frac{1}{e^{-4}}$

14) $27^x = 3^{2x+3}$

15) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 8$

16) $9^{4x} = \frac{1}{81}$

17) $25^x = 0.2$

18) $8^{x^2} = 8^{5x+6}$

19) $(2^{x+1})^2 = 64$

20) $2^{x+1} + 2^{x-1} = 20$

21) $e^x \cdot e^{3x} = e^{x-1}$

Puedes corroborar tus respuestas al final del módulo.

Nombre: ____________________________ Fecha: ___________________________

Grupo: ________ Fundamentos de Preparación al Cálculo

Tarea #6

Resuelva cada ecuación. Realice el procedimiento **completo.** (20 puntos)

(2 puntos)

1) $2^x = 16$

(4 puntos)

2) $7^{x+3} = \frac{1}{7}$

(3 puntos)

3) $3^{x+5} = 3^{x-1}$

(4 puntos)

4) $16^{2x} = 32$

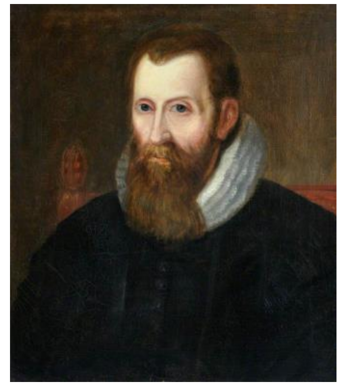
(3 puntos)

5) $\left(\frac{1}{4}\right)^{3x} = 16$

(4 puntos)

6) $9 \cdot 2^x = 72$

Lección 4: Función Logarítmica



John Napier

La función logarítmica es la inversa de la función exponencial porque ésta al ser una función uno a uno (pasa la prueba de la línea horizontal) se le puede buscar la inversa. El primero en definir los logaritmos fue el matemático escocés John Napier. Los logaritmos son importantes porque se usan para modelar observaciones de la ciencia e ingeniería, como por ejemplo, la magnitud o intensidad de los terremotos, el sonido entre otras cosa.

Sea *b* un número real positivo diferente de 1 ($b > 0$ y $b \neq 1$); entonces el logaritmo base *b* de *x* está definido por:

$$y = \log_b x \text{ si y solo si } x = b^y$$

para toda $x > 0$ y toda *y* número real.

Recuerda

b → base

EJEMPLOS DE FUNCIONES LOGARÍTMICAS:

1) $f(x) = \log_5 x$

2) $g(x) = \log_3 x + 6$

3) $F(x) = -\log 2x$

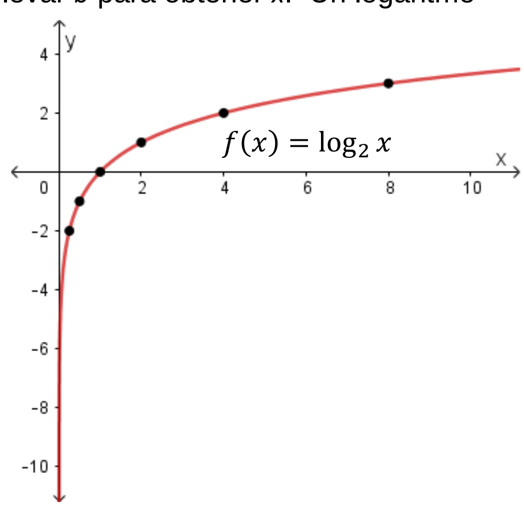
4) $G(x) = \ln(x - 4)$

El logaritmo base *b* de *x* es el exponente al cual se debe elevar *b* para obtener *x*. Un logaritmo es un exponente.

EJEMPLO: $f(x) = \log_2 x$

$$y = \log_2 x$$

x	*y*
$\frac{1}{4} = 0.25$	-2
$\frac{1}{2} = 0.5$	-1



1	0
2	1
4	2

- Si observas la gráfica de izquierda a derecha, su dominio es los números mayores que cero extendiéndose hacia el infinito porque la gráfica tiene asíntota vertical en cero.
- Si observas de abajo hacia arriba, su alcance o campo de valores es todos los números reales porque la gráfica se extiende para abajo hacia el infinito y va creciendo hacia arriba también hacia el infinito.
- Esto significa que esta gráfica nunca toca el eje *x* porque el mismo eje es la asíntota vertical. A su vez la gráfica no tiene interceptos en este eje.
- La gráfica tiene intercepto en el eje *x* en 1 porque toca el eje en el punto (1, 0).
- La función no es par ni impar porque no es simétrica.

La siguiente tabla resume todas las características o propiedades antes mencionadas.

Propiedades	$f(x) = \log_2 x$
Dominio	$\{x\|x > 0\} = (0, \infty)$
Alcance	$(-\infty, \infty) = R$
Asíntota horizontal	$y = 0$
Intercepto en el eje x	$x = 1 \rightarrow (1, 0)$
Intercepto en el eje y	No tiene
Creciente	$(-\infty, \infty)$
Par o impar	No es par ni impar

Para determinar el valor de la asíntota vertical iguala a cero el argumento.

Ejemplo: $\log(x + 2)$

$$x + 2 = 0$$

$$x = -2$$

$\therefore$ La asíntota vertical pasa por negativo dos.

El valor de la asíntota no se incluye en el dominio, por lo cual se utiliza paréntesis.

Dominio: $(-2, \infty)$

Nombre: ____________________________ Fecha: ___________________________

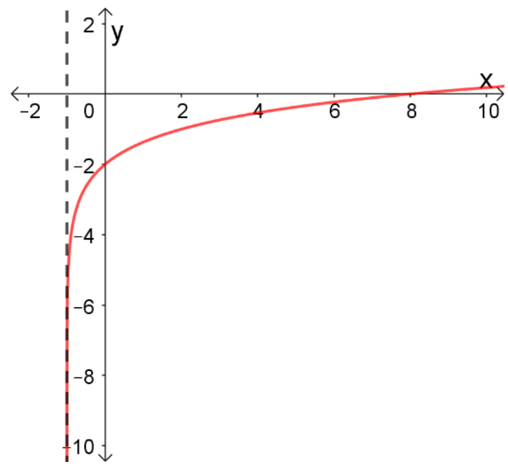
Grupo: ________ Fundamentos de Preparación al Cálculo

Tarea #7

Complete la siguiente tabla de las propiedades de cada función. (16 puntos)

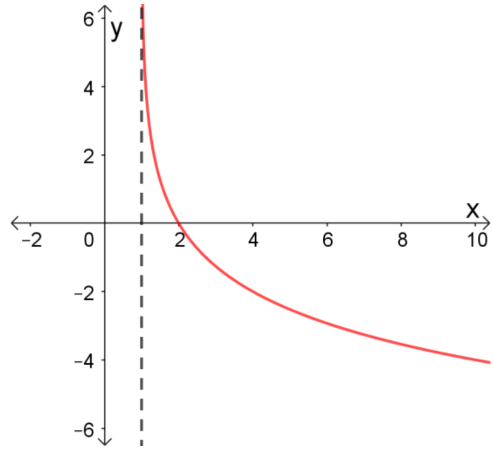
1) $f(x) = -2 + \log_3(x + 1)$

Propiedades	$f(x) = -2 + \log_3(x + 1)$
Dominio	
Alcance	
Asíntota horizontal	
Asíntota vertical	
Intercepto en el eje *x*	
Intercepto en el eje *y*	
Creciente o decreciente	
Par o impar	



2) $f(x) = -2\log_3(x - 1)$

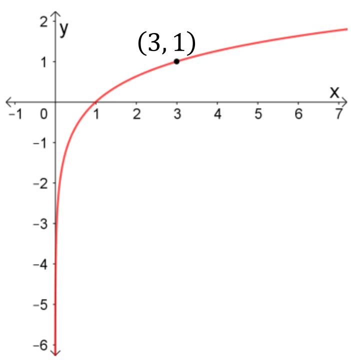
Propiedades	$f(x) = -2\log_3(x-1)$
Dominio	
Alcance	
Asíntota horizontal	
Asíntota vertical	
Intercepto en el eje *x*	
Intercepto en el eje *y*	
Creciente o decreciente	
Par o impar	



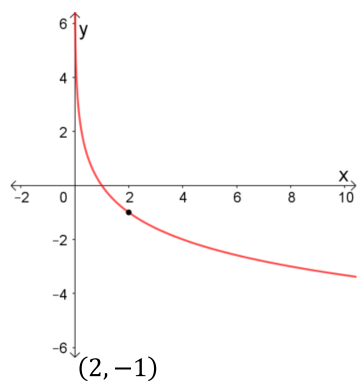
Dado un punto se puede hallar la función logarítmica en la forma $f(x) = \log_b x$ que se representa en una gráfica. Revisa las siguientes gráficas.

EJEMPLOS:

1)



2)



1) $f(3) = \log_b 3 = 1$, por lo tanto la base del logaritmo es 3. Entonces $f(x) = \log_3 x$

❖ Como el valor de *x* en el par ordenado es 3, 3 es el único número que se eleva a uno y se obtiene como resultado 3.

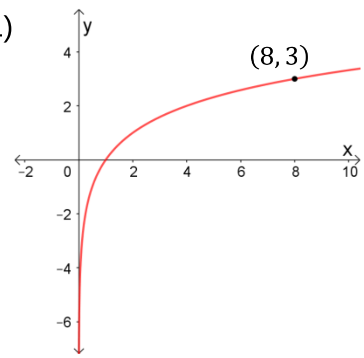
2) $f(2) = \log_b 2 = -1,$ por lo tanto la base del logaritmo es $\frac{1}{2}$. Entonces $f(x) = \log_{1/2} x$

❖ Como el valor de *x* en el par ordenado es 2, $\frac{1}{2}$ es el único número que se eleva a negativo uno y se obtiene como resultado $\frac{1}{2}$.

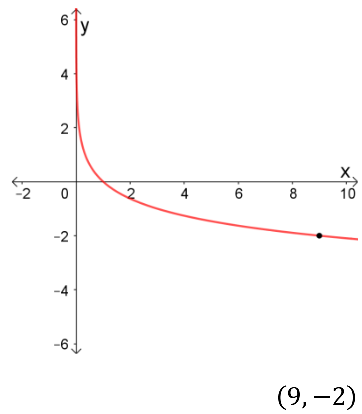
Ejercicio de práctica 12

Dada la gráfica, encuentra la función exponencial $f(x) = \log_b x$ correspondiente.

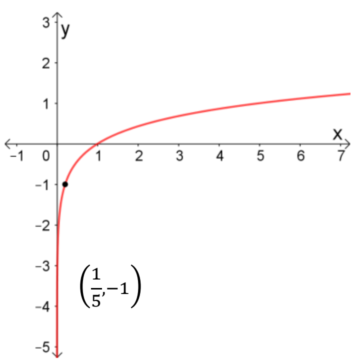
1)



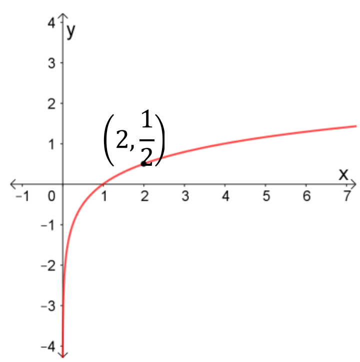
2)



3)



4)



Logaritmo común y logaritmo natural

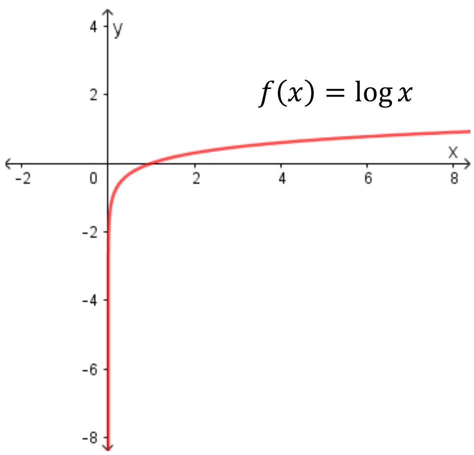
- El logaritmo con base 10 se conoce como logaritmo común. Cuando la base es 10 no es necesario escribirla porque se entiende que es el logaritmo común.

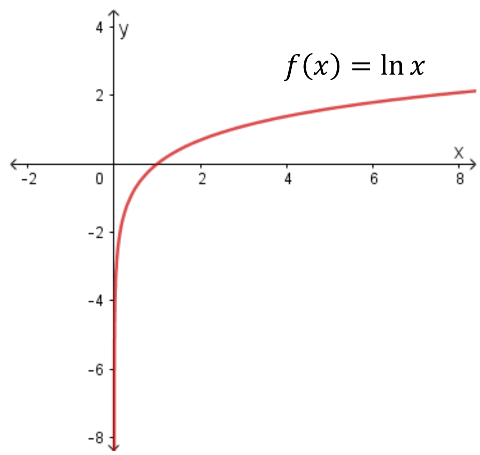
  $\log x = \log_{10} x$ para toda $x > 0$

- La función logarítmica con base ***e*** se conoce como logaritmo natural. El símbolo $\ln x$ es la forma abreviada de escribir $\log_e x$, que quiere decir logaritmo natural de x. Por lo tanto, podemos decir que la función logarítmica natural y la función exponencial natural son inversas.

  $\ln x = \log_e x$ para toda $x > 0$

A continuación se muestra las gráficas de la función logarítmica común y de la función logarítmica natural.





Para trazar la gráfica de una función logarítmica sigue los pasos que se repasaron anteriormente en la lección 1.

Ejercicio de práctica 13

Traza la gráfica que represente la función.

1) $f(x) = \log_{1/4} x$

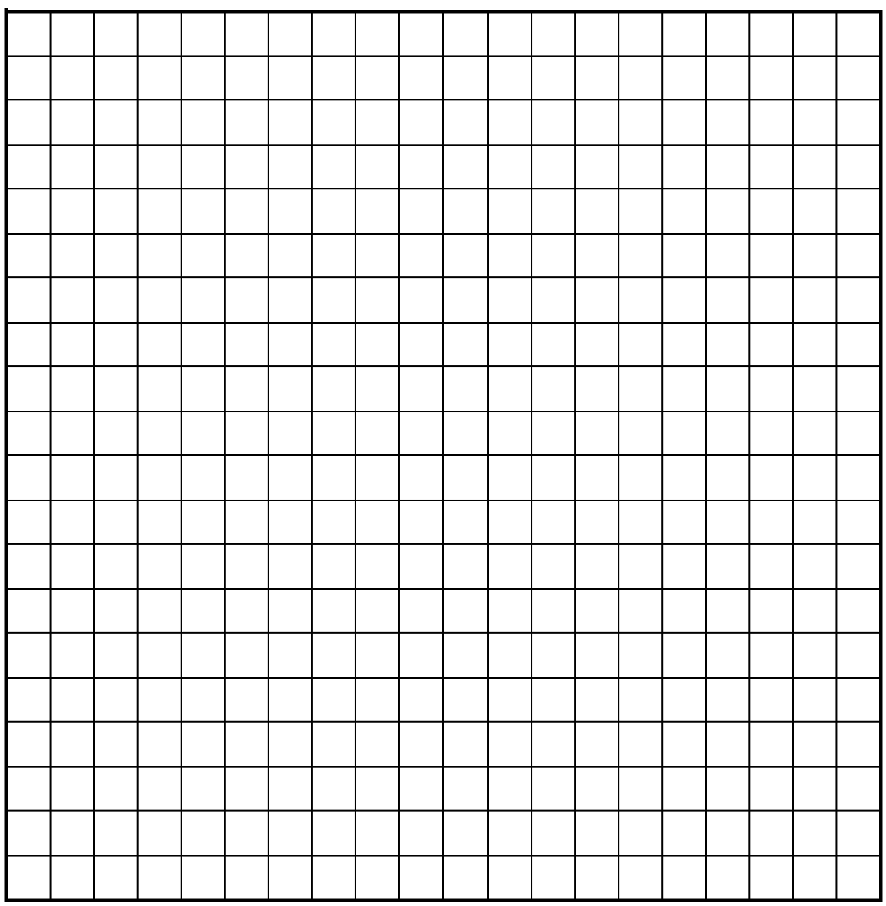
2) $f(x) = \log_3 x$

3) $f(x) = \log(x-1)$

4) $f(x) = \log x - 2$

5) $f(x) = \log_2 x + 1$

6) $f(x) = \log_{1/3}(x+2)$



http://www.imagui.com/a/hoja-cuadriculada-png-czEa6x7do

Puedes corroborar tus respuestas al final del módulo.

Ejercicio de práctica 14

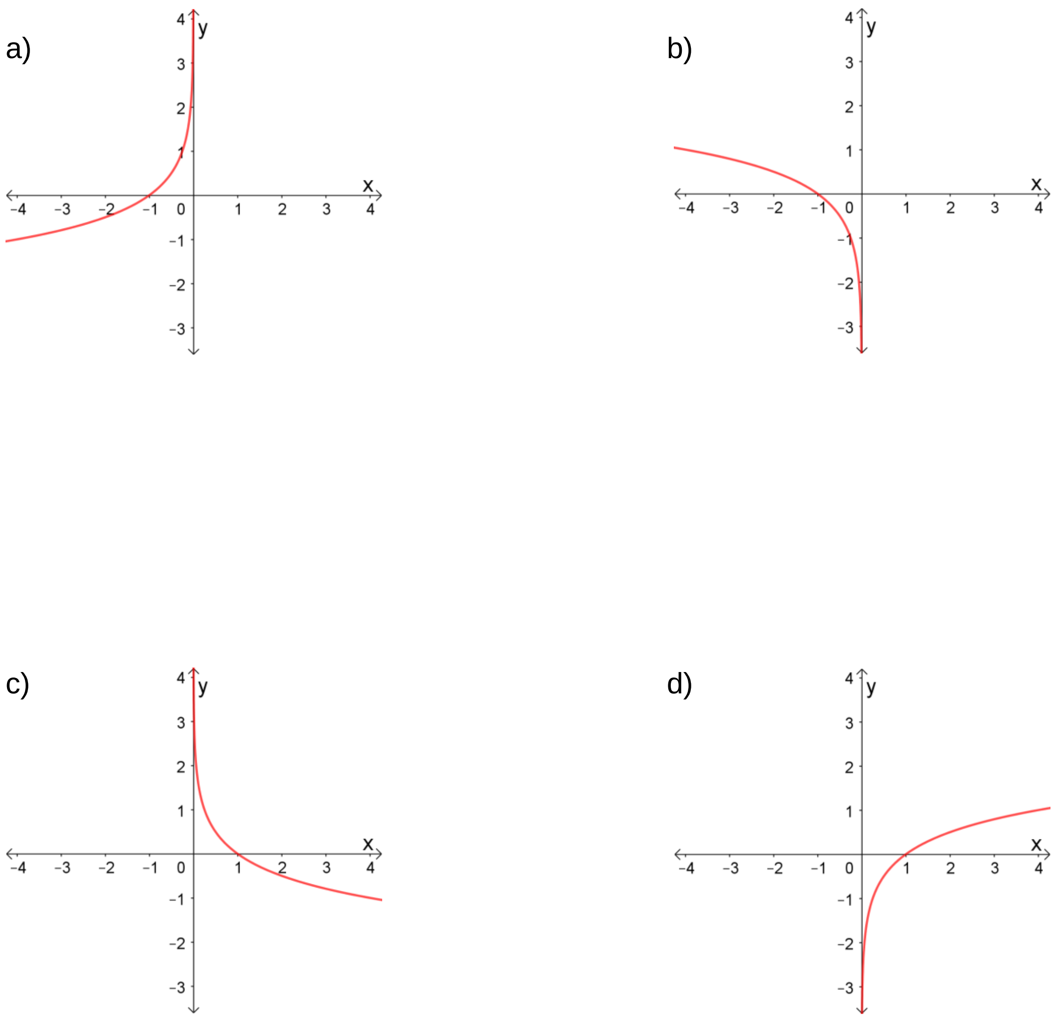
Parea la función exponencial con su gráfica correspondiente.

______1) $f(x) = \log_4 x$

______2) $f(x) = -\log_4 x$

______3) $f(x) = \log_4(-x)$

______4) $f(x) = -\log_4(-x)$



Puedes corroborar tus respuestas al final del módulo.

Nombre: ____________________________ Fecha: ___________________________

Grupo: ________ Fundamentos de Preparación al Cálculo

Tarea #8

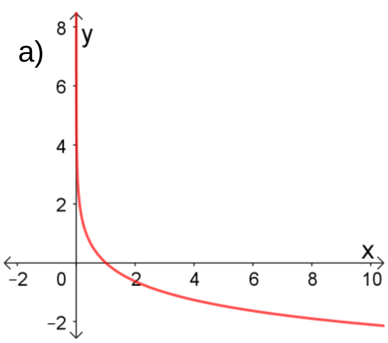
Parea la función exponencial con su gráfica correspondiente. (6 puntos)

_____1) $f(x) = \log_3 x$ _____2) $f(x) = -\log_3 x$

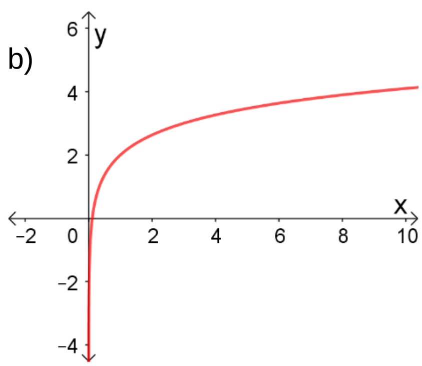
_____3) $f(x) = \log_3(-x)$ _____4) $f(x) = -\log_3(-x)$

_____5) $f(x) = \log_3(x-2)$ _____6) $f(x) = \log_3 x + 2$

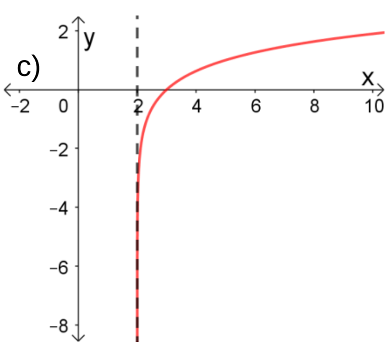
a)



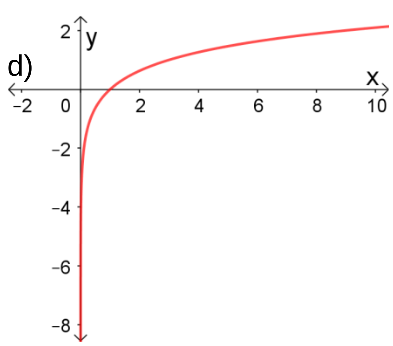
b)



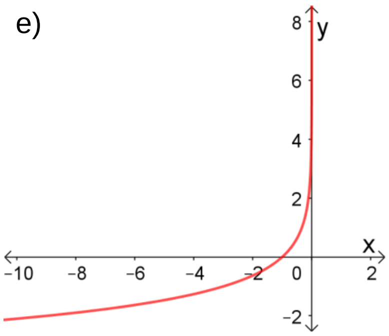
c)



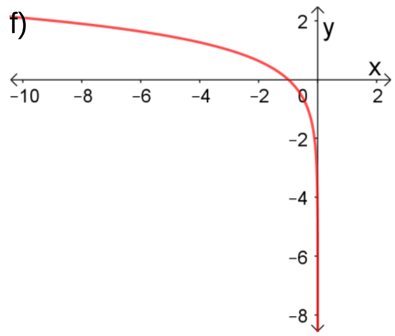
d)



e)



f)



Una forma exponencial se puede escribir en forma logarítmica.

EJEMPLO: $2^3 = 8 \leftrightarrow \log_2 8 = 3$

❖ Observa que en la forma exponencial del ejemplo el 2 es la base, el 3 es el exponente y el 8 es el resultado. Al cambiarlo a la forma logarítmica el 2 también es la base del logaritmo, el 8 es el argumento y el 3 es el resultado.

Ejercicio de práctica 15

Exprese cada ecuación en forma logarítmica.

1) $9^2 = 81$ 2) $10^{-2} = 0.01$ 3) $27^{2/3} = 9$

4) $5^{-3} = \frac{1}{125}$ 5) $7^0 = 1$ 6) $8^1 = 8$

7) $64^{1/3} = 4$ 8) $4^{3/2} = 8$ 9) $16^{-1} = \frac{1}{16}$

10) $12^{-2} = \frac{1}{144}$ 11) $4^{-1} = 0.25$ 12) $49^{1/2} = 7$

13) $e^1 = e$ 14) $e^0 = 1$ 15) $e^3 \approx 20.09$

De la misma manera una función logarítmica se puede en forma exponencial.

EJEMPLO: $\log_3 9 = 2 \leftrightarrow 3^2 = 9$

- Observa que en la forma logarítmica del ejemplo el 3 es la base del logaritmo, el 9 es el argumento y el 2 es el resultado. Al cambiarlo a la forma exponencial el 3 también es la base, el 2 es el exponente y el 9 es el resultado.

Ejercicio de práctica 16

Exprese cada ecuación en forma exponencial.

1) $\log_4 16 = 2$ 2) $\log_5 1 = 0$ 3) $\log_{13} 13 = 1$

4) $\log_{1/5} 5 = -1$ 5) $\log_7 343 = 3$ 6) $\log_{1/2} 16 = -4$

7) $\log_3 \left(\frac{1}{3}\right) = -1$ 8) $\log_3 81 = 4$ 9) $\log_{1/2} 64 = -6$

10) $\log 100 = 2$ 11) $\log_{\sqrt{9}} 9 = 2$ 12) $\log_8 2 = \frac{1}{3}$

13) $\ln 1 = 0$ 14) $\ln e = 1$ 15) $\ln 7.39 \approx 2$

Puedes corroborar tus respuestas al final del módulo.

Para evaluar expresiones logarítmicas se cambian a expresiones exponenciales.

EJEMPLOS

1) $\log_{27} 81 = y$

$27^y = 81$

$3^{3y} = 3^4$

$\frac{3y}{3} = \frac{4}{3}$

$y = \frac{4}{3}$

2) $\log x = -2$

$10^{-2} = x$

$\frac{1}{10^2} = x$

$\frac{1}{100} = x$

$x = \frac{1}{100} = 0.01$

3) $\log_b 256 = 4$

$b^4 = 256$

$b^4 = 4^4$

$b = 4$

- En el primer ejemplo luego de cambiar la expresión logarítmica a exponencial, se cambió a bases iguales para igualar los exponentes.

- En el segundo ejemplo luego de cambiar la expresión logarítmica a exponencial, se cambió el exponente negativo a exponente positivo.

- En el tercer ejemplo luego de cambiar la expresión logarítmica a exponencial, se cambió a bases iguales para igualar los exponentes.

Ejercicio de práctica 17

Determine el valor de b, x, y.

1) $\log_7 343 = y$

2) $\log_5 0.2 = y$

3) $\log_{1/6} 216 = y$

4) $\log_{144} 12 = y$

5) $\log_2 x = 5$

6) $\log_{27} x = \frac{1}{3}$

7) $\log x = 6$

8) $\log_5 x = -4$

9) $\log_b 128 = 7$

10) $\log_b 10{,}000 = 4$

11) $\log_b 11 = 1$

12) $\log_b \frac{1}{512} = -3$

13) $\log 0.001 = y$

14) $\log_b 18 = -1$

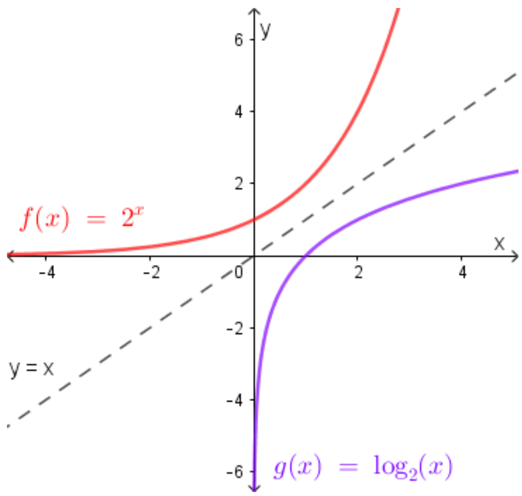
15) $\log_3 \frac{1}{x} = 2$

Puedes corroborar tus respuestas al final del módulo.

Observa lo que ocurre cuando se grafica en el sistema cartesiano una función y su inversa.

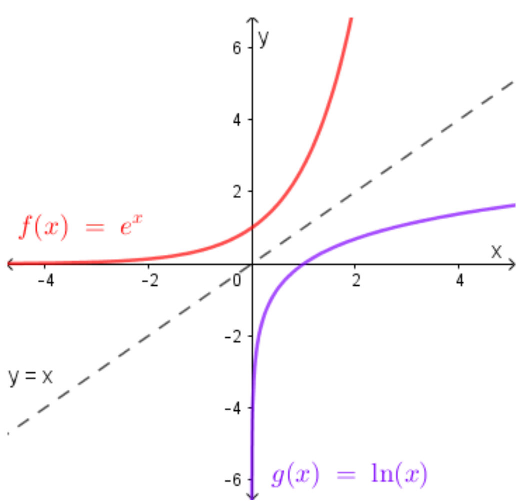
EJEMPLOS

1) $y = 2^x; y = \log_2 x$



Son simétricas con respecto a la recta $y = x$

2) $y = e^x; y = \ln x$



Son simétricas con respecto a la recta $y = x$

En general, si tenemos la gráfica de $y = b^x$y la reflejamos a través de la recta $y = x$, obtenemos la gráfica de $y = \log_b x$ y viceversa.

Recuerda

Para hallar la inversa de una función se cambian las *x* por las *y* y las *y* por las *x*. Luego se resuelve la ecuación despejando nuevamente para *y*.

EJEMPLOS

1) $f(x) = 2^x$

$$y = 2^x$$
$$x = 2^y$$
$$\log_2 x = \log_2 2^y$$
$$\log_2 x = y$$
$$y = \log_2 x$$
$$f^{-1}(x) = \log_2 x$$

2) $f(x) = \log_3 x$

$$y = \log_3 x$$
$$x = \log_3 y$$
$$3^x = 3^{\log_3 y}$$
$$3^x = y$$
$$y = 3^x$$
$$f^{-1}(x) = 3^x$$

- En el primer ejemplo se cambiaron las *x* por las *y*. Luego se añadió logaritmos a ambos lados de la igualdad para despejar la *y*. Finalmente se escribió en notación de inversa.

- En el segundo ejemplo se cambiaron las *x* por las *y*. Luego se añadió el tres como base a ambos lados de la igualdad para despejar la *y.* Finalmente se escribió en notación de inversa.

Ejercicio de práctica 18

Halla la inversa de cada función.

1) $f(x) = 5^x$

2) $g(x) = \log x$

3) $h(x) = 2^{x+1}$

4) $F(x) = \ln(x - 1)$

5) $G(x) = \log_{1/3}(x + 1)$

6) $H(x) = e^{4x}$

Puedes corroborar tus respuestas al final del módulo.

Nombre: ____________________________ Fecha: ___________________________

Grupo: ________ Fundamentos de Preparación al Cálculo

Tarea #9

Halle la inversa de cada función. Realice el procedimiento **completo**. (25 puntos)

(4 puntos)

1) $f(x) = 7^x + 2$

(4 puntos)

2) $f(x) = -8 + \log_5 x$

(4 puntos)

3) $f(x) = 4^{x-3}$

(4 puntos)

4) $f(x) = \ln(x + 6)$

(4 puntos)

5) $f(x) = \log_{1/2}(x - 10)$

(5 puntos)

6) $f(x) = e^{-x-3} - 2$

Como viste anteriormente, la función exponencial y la función logarítmica son inversas.

Esto quiere decir que dichas funciones se cancelan entre sí. Cuando se hace la composición de estas funciones podemos ver que:

$$g[f(x)] = \log_b b^x = x \text{ y } f[g(x)] = b^{\log_b x} = x$$

EJEMPLOS

1) $\log_3 3^{9x} = 9x$

2) $2^{\log_2 8} = 8$

- ❖ En el primer ejemplo la base de la expresión logarítmica es igual a la base de la expresión exponencial que está en el argumento. De esta forma el resultado es el exponente del argumento.

- ❖ En el segundo ejemplo la base de la expresión exponencial es igual a la base del logaritmo que está como exponente. De esta forma el resultado es el argumento.

Ejercicio de práctica 19

Usa las propiedades inversas para simplificar las siguientes expresiones exponenciales y logarítmicas.

1) $e^{\ln 2}$

2) $\log_4 64^x$

3) $\ln e^{x-3}$

4) $9^{\log_9 x}$

5) $10^{\log 21}$

6) $\log 10^{5x}$

Ejercicio de práctica 20

Traza la gráfica de una función logarítmica a partir de su inversa.

1) $f(x) = \log_{1/5} x$

2) $f(x) = \log_{7} x$

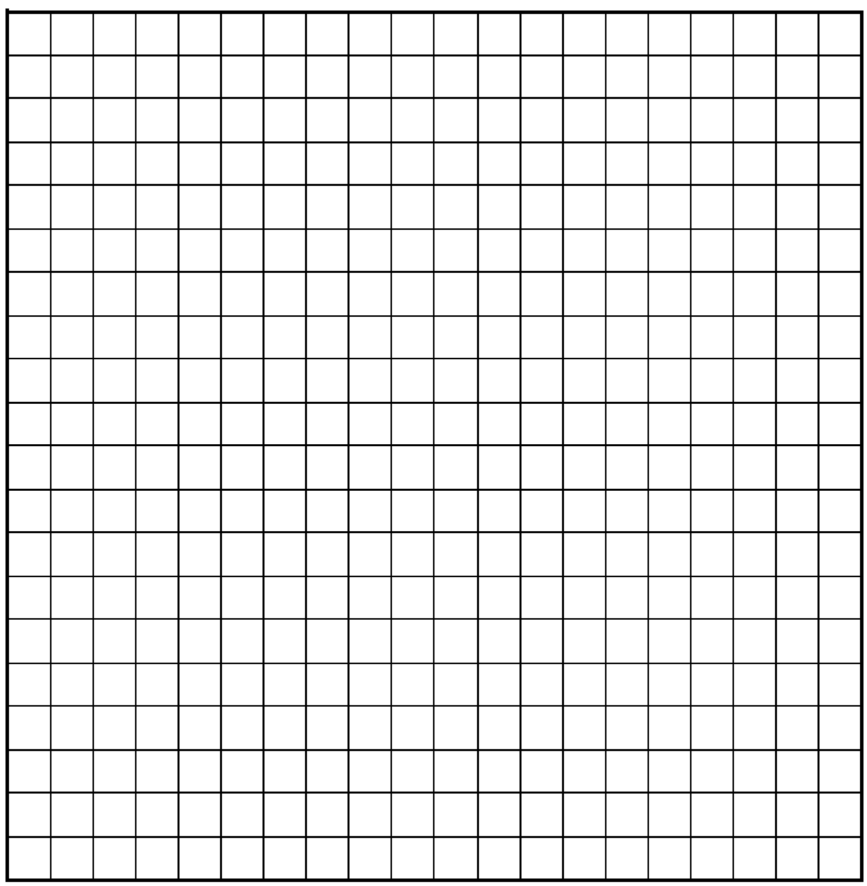
3) $f(x) = \log(x - 4)$

4) $f(x) = \log x - 3$

5) $f(x) = \log_{6} x + 4$

6) $f(x) = \log_{1/4}(x + 3)$

Puedes corroborar tus respuestas al final del módulo.



http://www.imagui.com/a/hoja-cuadriculada-png-czEa6x7do

Lección 5: Transformaciones de la Gráfica de una Función Exponencial o una Función Logarítmica

La siguiente tabla resume las transformaciones que pueden ocurrir en la gráfica de una función. Repasa cuidadosamente cada uno de los casos.

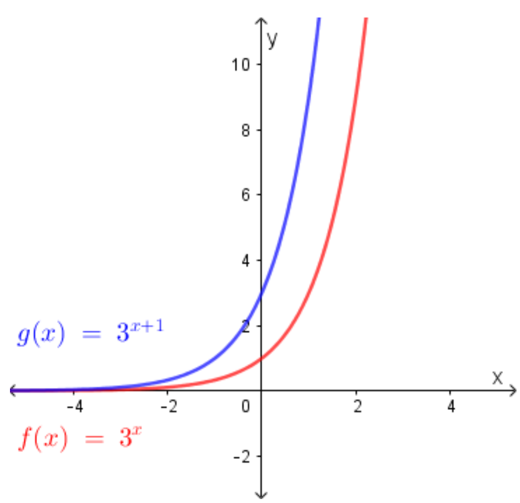
Transformaciones	$\boldsymbol{f(x)}$	Descripción
Traslación horizontal	$f(x-h)$	La gráfica se desplaza hacia la izquierda o hacia la derecha.
Alargamiento o encogimiento horizontal	$f(ax)$	La gráfica se alarga o se encoge hacia el eje *y*
Reflexión	$f(-x)$	La gráfica se refleja en el eje *y*
Alargamiento o encogimiento vertical	$af(x)$	La gráfica se alarga o se encoge hacia el eje *x*
Reflexión	$-f(x)$	La gráfica se refleja en el eje *x*
Traslación vertical	$f(x)+k$	La gráfica se desplaza hacia arriba o hacia abajo

Si la comprensión del contenido de esta lección se te hace difícil, debes solicitar ayuda de tus familiares, amigos o maestros

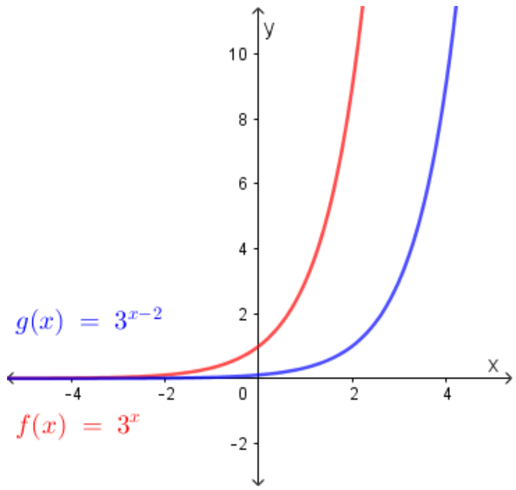
EJEMPLOS

Cada una de las gráficas siguientes es una transformación de la gráfica de $f(x) = 3^x$.

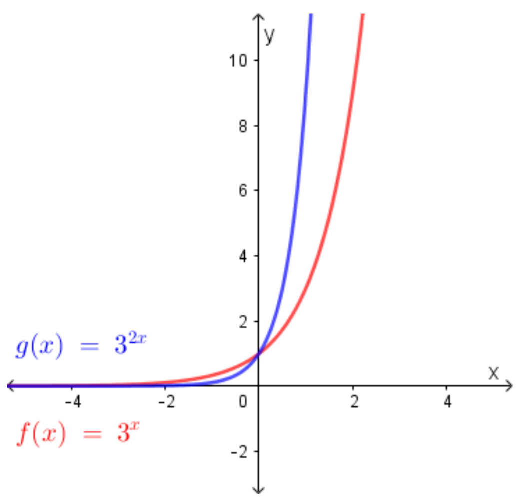
1) $g(x) = 3^{x+1} = f(x+1)$, la gráfica de g se puede obtener al desplazar la gráfica de f una unidad a la izquierda.



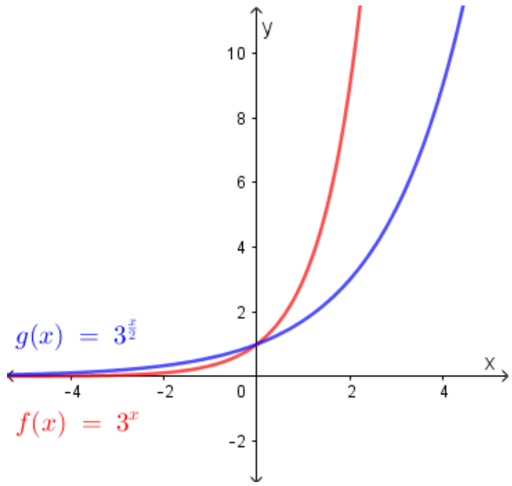
2) $g(x) = 3^{x-2} = f(x-2)$, la gráfica de g se puede obtener al desplazar la gráfica de f dos unidades a la derecha.



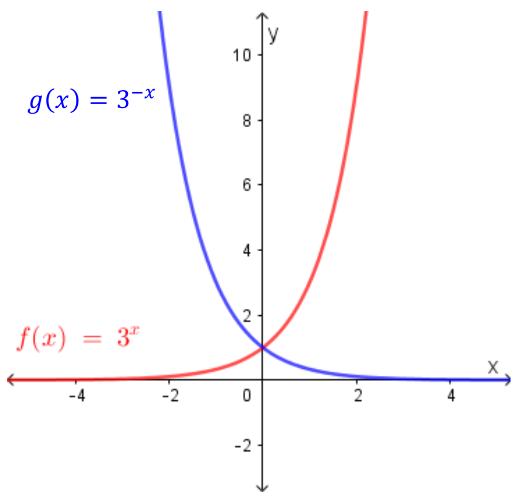
3) $g(x) = 3^{2x} = f(2x)$, la gráfica de g se puede obtener al encoger la gráfica de f por un factor de dos.



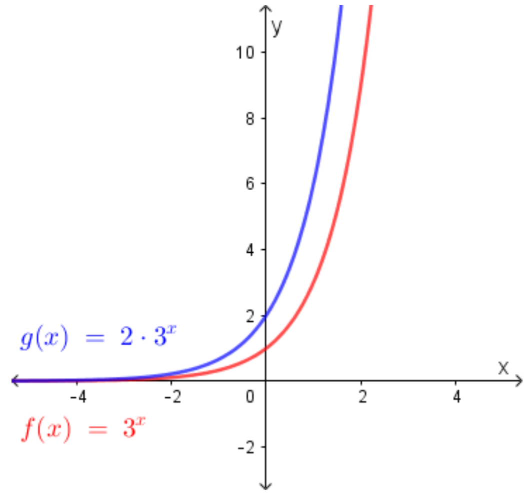
4) $g(x) = 3^{x/2} = f\left(\frac{x}{2}\right)$, la gráfica de g se puede obtener al alargar la gráfica de f por un factor de un medio.



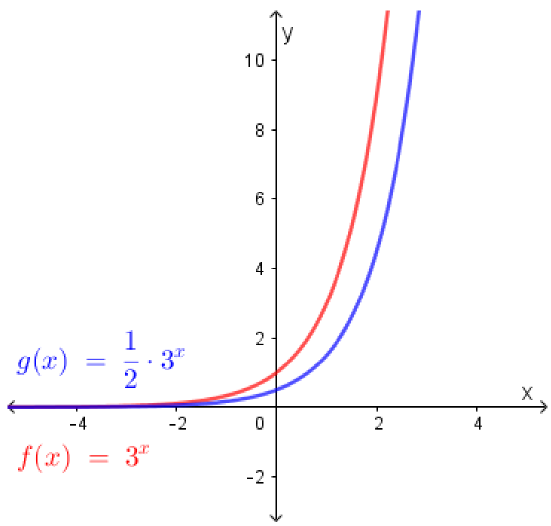
5) $g(x) = 3^{-x} = f(-x)$, la gráfica de g se puede obtener al reflejar la gráfica de f en el eje y



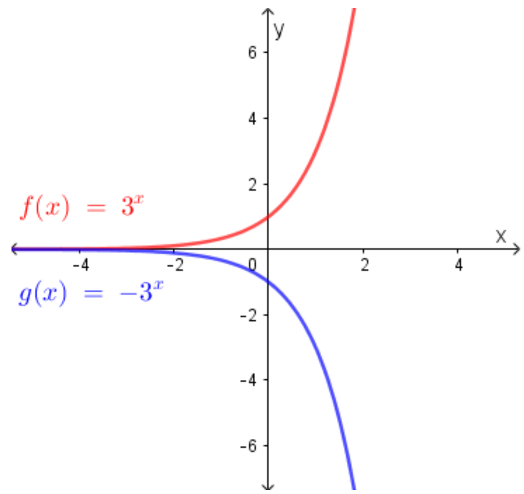
6) $g(x) = 2(3^x) = 2f(x)$, la gráfica de g se puede obtener al alargar la gráfica de f por un factor de dos.



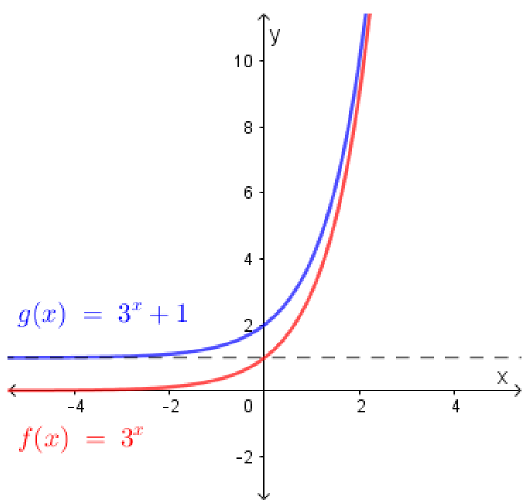
7) $g(x) = \frac{1}{2}(3^x) = \frac{1}{2}f(x)$, la gráfica de g se puede obtener al encoger la gráfica de f por un factor de un medio.



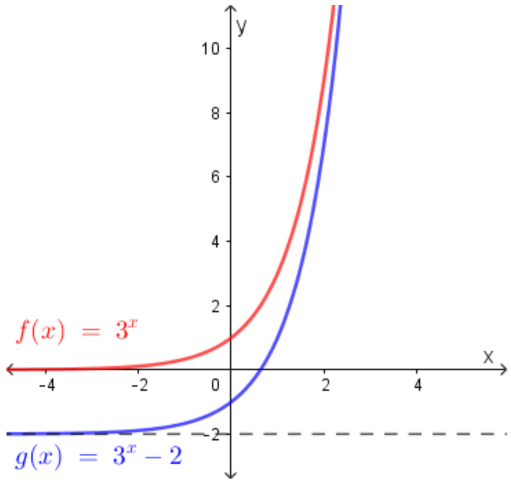
8) $g(x) = -3^x = -f(x)$, la gráfica de g se puede obtener al reflejar la gráfica de f en el eje x.



9) $g(x) = 3^x + 1 = f(x) + 1$, la gráfica de g se puede obtener al desplazar la gráfica de f una unidad hacia arriba.



10) $g(x) = 3^x - 2 = f(x) - 2$, la gráfica de g se puede obtener al desplazar la gráfica de f dos unidades hacia abajo.



EJEMPLO: $f(x) = -3 \cdot 2^{-x+1} + 4 = -3 \cdot 2^{-(x-1)} + 4$

❖ Si comparas la función dada con la función básica puedes notar que tiene varias transformaciones. Siguiendo el orden de operaciones identifica cada uno de los cambios que va ocurriendo en la función. Observa los cambios de la función en el ejemplo y cómo se describen.

a) $f(x) = 2^x \rightarrow$ función básica

b) $f(x) = 2^{x-1} \rightarrow$ desplazamiento horizontal una unidad a la derecha.

c) $f(x) = 2^{-(x-1)} \rightarrow$ reflexión con respecto al eje de y.

d) $f(x) = 3 \cdot 2^{-(x-1)} \rightarrow$ expansión o alargamiento vertical por un factor de tres.

e) $f(x) = -3 \cdot 2^{-(x-1)} \rightarrow$ reflexión con respecto al eje de x.

f) $f(x) = -3 \cdot 2^{-(x-1)} + 4 \rightarrow$ desplazamiento vertical cuatro unidades hacia arriba.

Ejercicio de práctica 21

Describe las transformaciones de cada función y trace la gráficas.

Recuerda

Si hay un binomio como exponente debes verificar si factoriza.

1) $f(x) = 4^{x-3}$

2) $f(x) = 3(5^{x})$

3) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x} - 4$

4) $f(x) = e^{x+6} + 2$

5) $f(x) = 3^{7x}$

6) $f(x) = -\frac{1}{8}e^{-x}$

7) $f(x) = 2^{x-3} + 1$

8) $f(x) = e^{-x} - 5$

9) $f(x) = 0.4^{-2x}$

10) $f(x) = -e^{x+10}$

11) $f(x) = 6^{x/2}$

12) $f(x) = -9\left(\frac{1}{2}\right)^{-x+4} + 3$

Puedes corroborar tus respuestas al final del módulo.

EJEMPLO: $f(x) = -\frac{1}{4}\log_2(-x-1) - 3 = -\frac{1}{4}\log_2[-(x+1)] - 3$

a) $f(x) = \log_2 x \rightarrow$ función básica

b) $f(x) = \log_2(x+1) \rightarrow$ desplazamiento horizontal una unidad a la izquierda.

c) $f(x) = \log_2[-(x+1)] \rightarrow$ reflexión con respecto al eje de y.

d) $f(x) = \frac{1}{4}\log_2[-(x+1)] \rightarrow$ contracción o encogimiento vertical por un factor de un cuarto.

e) $f(x) = -\frac{1}{4}\log_2[-(x+1)] \rightarrow$ reflexión con respecto al eje de x.

f) $f(x) = -\frac{1}{4}\log_2[-(x+1)] - 3 \rightarrow$ desplazamiento vertical tres unidades hacia abajo.

Ejercicio de práctica 22

Describe las transformaciones de cada función y trace la gráficas.

1) $f(x) = \log(x-4)$

2) $f(x) = 5\ln x$

3) $f(x) = \log\left(-\frac{1}{2}x\right)$

4) $f(x) = 2\log_{1/2}(x+3)$

5) $f(x) = -3\log_2 x$

6) $f(x) = \log_{1/3}(4x) + 5$

7) $f(x) = \log_4 x + 2$

Recuerda

Si hay un binomio como argumento debes verificar si factoriza.

8) $f(x) = 4\ln(-x) + 6$

9) $f(x) = -\log_{1/5}(x - 7)$

10) $f(x) = \log_2(x + 2) - 3$

11) $f(x) = -\log x - 8$

12) $f(x) = \frac{2}{3}\ln x + 13$

Puedes corroborar tus respuestas al final del módulo.

Nombre: ____________________________ Fecha: ___________________________

Grupo: ________ Fundamentos de Preparación al Cálculo

Tarea #10

I. Dibuje la gráfica para cada función. Trace e identifique la asíntota correspondiente. (28 puntos)

1) $f(x) = 4 \cdot 2^{x} - 2$

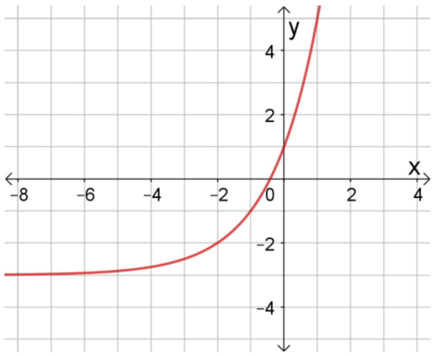
2) $f(x) = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$

3) $f(x) = \log_{3}(x + 6) + 2$

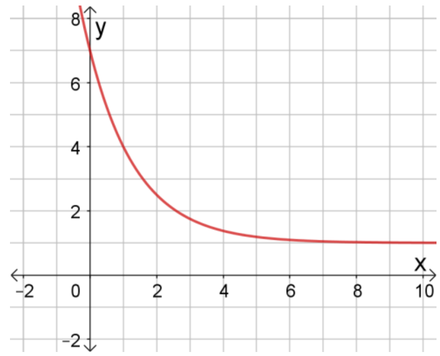
4) $f(x) = 3\log_{1/4}(x - 1)$

II. Mencione el dominio y campo de valores de cada gráfica. Identifique sus asíntotas. (12 puntos)

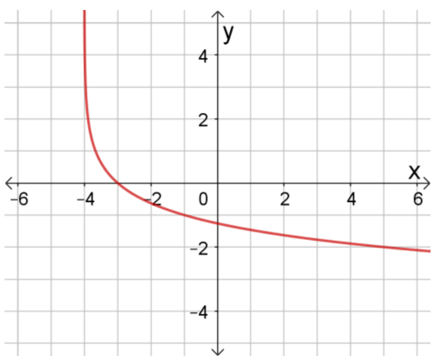
1) $f(x) = 4 \cdot 2^x - 3$



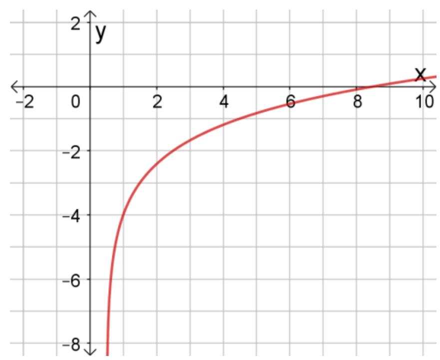
2) $f(x) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 1$



3) $f(x) = \log_{1/3}(x+4)$



4) $f(x) = \log_2(2x-1) - 4$



Nombre: ___________________________ Fecha: __________________________

Grupo: ________ Fundamentos de Preparación al Cálculo

Tarea #11

Describa las transformaciones de cada función. (20 puntos)

1) $f(x) = e^x - 7$

2) $f(x) = 10^{-x}$

3) $f(x) = -e^x$

4) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x-5}$

5) $f(x) = e^{x-2}$

6) $f(x) = -6^x + 11$

7) $f(x) = -4(2)^{-15-3x}$

8) $f(x) = -4 + \log_2 x$

9) $f(x) = \ln(9x)$

10) $f(x) = 3\log_4(-x)$

11) $f(x) = \ln(x + 8)$

12) $f(x) = 1 - \log x$

Lección 6: Modelos Exponenciales

Algunas situaciones de la vida real se pueden representar usando modelos exponenciales, ya que hay cantidades que aumentan o disminuyen durante un periodo de tiempo. Observa y estudia las siguientes situaciones para que veas cuán útil son las funciones exponenciales.

EJEMPLOS

1) En diciembre de 2011 adquiriste un automóvil en \$52,000. Si cada año su valor inicial disminuye 12%, ¿cuánto valdrá en diciembre de 2020?

- ❖ La fórmula $V_f = V_i \cdot r^t$ se utiliza para calcular el decrecimiento del valor de un automóvil, donde V_f es el valor final, V_i es el valor inicial, r es el porcentaje de depreciación y t es el tiempo en años.

- ❖ La tasa de depreciación se obtiene restándole a 1 el decimal correspondiente al porcentaje que disminuye.

Datos

$V_i = \$52{,}000$

$12\% = \frac{12}{100} = 0.12$

$t = 2{,}020 - 2{,}011 = 9 \text{ años}$

$V_f = V_i \cdot (1 - r)^t$

$V_f = \$52{,}000(1 - 0.12)^9$

$V_f = \$52{,}000(0.88)^9$

$V_f \approx \$52{,}000(0.3165)$

$V_f \approx \$16{,}458$

En diciembre de 2020 el automóvil valdrá aproximadamente \$16,458.

2) Una población de bacterias comenzó con 50 en una colonia y se duplica cada cuatro horas. ¿Cuántas bacterias habrá después de ocho horas?

- ❖ La fórmula $n(t) = n_0 \cdot 2^{t/a}$ se utiliza para calcular el crecimiento cuando el tiempo se duplica, donde n_0 es la población inicial, a es el tiempo de duplicación y t es el tiempo transcurrido.

Datos

$n_0 = 50$

$a = 4\ horas$

$t = 8\ horas$

$n(t) = n_0 \cdot 2^{t/a}$

$n(8) = 50 \cdot 2^{8/4}$

$n(8) = 50 \cdot 2^2$

$n(8) = 50 \cdot 4$

$n(8) = 200$

Después de ocho horas habrá 200 bacterias.

3) Si $2,000 son depositados en una cuenta que paga a un 2.5% de interés compuesto trimestralmente, ¿cuánto dinero tendrás en la cuenta en 5 años?

- ❖ La fórmula $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ se utiliza para calcular la cantidad al final de t años a un interés compuesto, donde P es el principal, r es la tasa de interés anual, n veces que el interés se capitaliza por año.

Datos

$P = \$2{,}000$

$r = 2.5\% = \frac{2.5}{100} = 0.025$

$t = 5\ años$

$n = 4\ trimestres$

$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$

$A = \$2{,}000\left(1 + \frac{0.025}{4}\right)^{(4)(5)}$

$A = \$2{,}000(1 + 0.00625)^{20}$

$A = \$2{,}000(1.00625)^{20}$

$A \approx \$2{,}000(1.13271)$

$A \approx \$2{,}265.42$

Luego de cinco años tendrás en la cuenta aproximadamente $2,265.42.

4) Si $2,000 son depositados en una cuenta de ahorros que paga a un 2.5% de interés compuesto continuo anualmente, ¿cuánto dinero tendrás en la cuenta en 5 años?

- ❖ La fórmula $A = Pe^{rt}$se utiliza para calcular la cantidad al final de t años a un interés compuesto continuo, donde P es el principal, r es la tasa de interés anual.

Datos

$P = \$2{,}000$

$r = 2.5\% = \frac{2.5}{100} = 0.025$

$t = 5\ años$

$A = Pe^{rt}$

$A = \$2{,}000e^{(0.025)(5)}$

$A = \$2{,}000e^{0.125}$

$A \approx \$2{,}000(1.13315)$

$A \approx \$2{,}266.30$

Luego de cinco años tendrás en la cuenta aproximadamente $2,266.30.

Recuerda

Recuerda identificar los datos y escoger el modelo o la fórmula que represente la

Ejercicios de práctica 23

Resuelve cada situación. Escribe tu respuesta a dos lugares decimales.

1) En diciembre de 2020 adquiriste un automóvil en $32,438. Si cada año su valor inicial disminuye 5.9%, ¿cuánto valdrá en diciembre de 2025?

2) Una población de bacterias comenzó con 500 en una colonia y se duplica cada seis horas. ¿Cuántas bacterias habrá después de un día?

3) Si $15,000 son depositados en una cuenta que paga a un 5% de interés compuesto trimestralmente, ¿cuánto dinero tendrás en la cuenta en 2 años?

4) Si $15,000 son depositados en una cuenta de ahorros que paga a un 5% de interés compuesto continuo anualmente, ¿cuánto dinero tendrás en la cuenta en 2 años?

Si la comprensión del contenido de esta lección se te hace difícil, debes solicitar ayuda de tus familiares, amigos o maestros.

Puedes corroborar tus respuestas al final del módulo.

Lección 7: Propiedades de los Logaritmos

La siguiente tabla resume las propiedades de los logaritmos. Dale un vistazo a cada una de ellas y repasa sus ejemplos

- Si *b, m* y *n* son números reales positivos, $b \neq 1$, y *p* y *x* son números reales entonces:

Propiedad	Justificación	Ejemplo
1) $\log_b 1 = 0$	$b^0 = 1$	$\log_2 1 = 0$
2) $\log_b b = 1$	$b^1 = b$	$\log_2 2 = 1$
3) $\log_b b^x = x$	$b^x = b^x$	$\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$
4) $b^{\log_b x} = x, x > 0$		$2^{\log_2 3} = 3$
Producto 5) $\log_b mn = \log_b m + \log_b n$		$\log 6 = \log 2(3) = \log 2 + \log 3$
Cociente 6) $\log_b \frac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$		$\log \frac{3}{2} = \log 3 - \log 2$
Potencia 7)$\log_b m^p = p \log_b m$		$\log 9 = \log 3^2 = 2 \log 3$
8) $\log_b m = \log_b n$, si y solo si $m = n$		$\log_2(x-3) = \log_2 4$ $x - 3 = 4$ $x = 4 + 3$ $x = 7$

- Si el argumento es uno, entonces el resultado del logaritmo es cero.
- Si la base y el argumento son iguales, entonces el resultado del logaritmo es uno.
- Si el argumento es una potencia cuya base es igual a la base del logaritmo, entonces el resultado del logaritmo es el exponente.
- Si el exponente de una expresión exponencial es un logaritmo, entonces el resultado es el argumento.

- Si el argumento de un logaritmo es un producto, entonces es igual a la suma de logaritmos.
- Si el argumento de un logaritmo es un cociente, entonces es igual a la resta de logaritmos.
- Si el argumento de un logaritmo es una potencia, entonces el exponente se escribe antes del logaritmo.
- Si dos logaritmos con bases la misma base son iguales. Entonces se igualan los argumentos.

Estas propiedades aplican también para los logaritmos naturales.

Recuerda

Repasar las propiedades te ayuda entender mejor la función logarítmica.

Los logaritmos se pueden evaluar a partir de otros logaritmos.

EJEMPLO: Usa $\log_9 2 \approx 0.315$ y $\log_9 11 \approx 1.091$ para evaluar cada logaritmo.

1) $\log_9 22 = \log_9(2 \cdot 11) = \log_9 2 + \log_9 11 \approx 0.315 + 1.091 \approx 1.406$

- El argumento se escribió usando sus factores correspondientes. Luego se cambió a suma de logaritmos según la propiedad indicada. Para hallar el resultado final, se sustituyeron los logaritmos por sus valores aproximados y se sumó.

2) $\log_9 \frac{2}{11} = \log_9 2 - \log_9 11 \approx 0.315 - 1.091 \approx -0.776$

- Como el argumento es una división se cambió a resta de logaritmos suma de logaritmos según la propiedad indicada. Para hallar el resultado final, se sustituyeron los logaritmos por sus valores aproximados y se restó.

3) $\log_9 512 = \log_9 2^9 = 9 \log_9 2 \approx 9(0.32) \approx 2.835$

- ❖ El argumento se cambió a su potencia correspondiente con base dos. El exponente se escribió antes del logaritmo siguiendo la propiedad indicada. Para hallar el resultado final, se sustituyó el logaritmo por su valor aproximado y se multiplicó.

Ejercicio de práctica 24

Usa $\log_2 5 \approx 2.32$ y $\log_2 9 \approx 3.17$ para evaluar cada logaritmo.

1) $\log_2 45$ 2) $\log_2 \frac{5}{9}$ 3) $\log_2 25$

4) $\log_2 125$ 5) $\log_2 \frac{1}{5}$ 6) $\log_2 \frac{1}{9}$

Una expresión logarítmica con un solo logaritmo se puede desarrollar en varios logaritmos.

EJEMPLO: $\log \frac{x^5\sqrt{y}}{ab^3} = \log x^5\sqrt{y} - \log ab^3 = \log x^5 + \log\sqrt{y} - (\log a + \log b^3)$

$= \log x^5 + \log\sqrt{y} - \log a - \log b^3 = \log x^5 + \log y^{1/2} - \log a - \log b^3$

$= 5\log x + \frac{1}{2}\log y - \log a - 3\log b$

- ❖ Como la operación principal es división se separó en la resta de dos logaritmos usando la propiedad indicada. A su vez, se separó en la suma de dos logaritmos. Como después de la resta hay dos términos se cambiaron los signos. Luego se cambió la raíz por su exponente fraccionario correspondiente. Finalmente, se escribió el exponente antes del logaritmo.

Ejercicio de práctica 25

Expresa en términos de varios logaritmos.

1) $\ln \frac{3x^5}{y}$ 2) $\log_7 5x^6$ 3) $\ln \frac{9}{24x}$

4) $\log_5 7\sqrt{x}$ 5) $\log_6 \sqrt[4]{x^3y}$ 6) $\log_5 \sqrt[3]{\left(\frac{x^4y^5}{z}\right)^2}$

Una expresión logarítmica que tiene varios logaritmos se puede reducir a un solo logaritmo.

EJEMPLO: $5\left(3\log_2 m + \frac{1}{4}\log_2 n\right) = 5\left(\log_2 m^3 + \log_2 n^{1/4}\right) = 5\log_2 m^3 n^{1/4}$

$= 5\log_2 m^3\sqrt[4]{n} = \log_2\left(m^3\sqrt[4]{n}\right)^5 = \log_2 m^{15}\sqrt[4]{n^5}$

- Como hay dos números multiplicados por los logaritmos se escriben como exponentes. La suma de los logaritmos se cambió a multiplicación usando la propiedad indicada. El exponente fraccionario se cambió a su raíz correspondiente. Luego, el número que multiplica al logaritmo se cambió como exponente. Finalmente, se multiplican los exponentes.

Ejercicio de práctica 26

Expresa como un solo logaritmo.

1) $\log 8 - 2\log 3 + \log 5$ 2) $\ln 9 + 3\ln 4 - \ln 24$ 3) $\log x - \log 7$

4) $\ln 4 + 2\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln x$ 5) $\log\left(\frac{m}{n}\right) - 4\log m^3 + \log n^{-2}$ 6) $2\log_3(m-n)$

Puedes corroborar tus respuestas al final del módulo.

Cuando los logaritmos no tiene bases comunes o naturales se pueden cambiar a base 10 o *e* usando la fórmula de cambio de bases. Luego de hacer el cambio puedes usar una calculadora para aproximar el valor del logaritmo.

Si $a > 0$ y si *b* y *c* son números reales positivos diferentes de 1,$b \neq 1, c \neq 1$, entonces:

$$\log_c a = \frac{\log_b a}{\log_b c}$$

$\log_c a = \frac{\log a}{\log c}$ $\log_c a = \frac{\ln a}{\ln c}$

EJEMPLO: $5^x = 8$

$$x = \log_5 8$$

$$x = \frac{\log 8}{\log 5}$$

$$x \approx \frac{0.9031}{0.6990}$$

$$x \approx 1.29$$

- Se cambió a su forma logarítmica correspondiente y se aplicó la fórmula de cambio de base.

Ejercicio de práctica 27

Halla el valor de la siguiente expresión. Aproxime el resultado a dos lugares decimales.

1) $\log_2 7$

2) $\log_7 28$

3) $\log_{11} 16$

4) $\log_{23} 8$

5) $\log_{20} 50$

6) $\log_6 19$

7) $\log_5 11$

8) $\log_9 \frac{2}{13}$

9) $\log_3 \frac{9}{40}$

10) $\log_{1/2} 3$

11) $\frac{\log_4 27}{\log_4 3}$

12) $\frac{\log_9 4}{\log_9 64}$

Puedes corroborar tus respuestas al final del módulo.

Nombre: ___________________________ Fecha: __________________________

Grupo: ________ Fundamentos de Preparación al Cálculo

Tarea #12

Use las propiedades correspondientes para escribir cada expresión como un solo logaritmo o varios logaritmos según aplique. Realice el procedimiento **completo**.

(30 puntos)

(2 puntos)

1) $\log_3 5 + \log_3 6$

(3 puntos)

2) $\log x\sqrt{y\sqrt{z}}$

(4 puntos)

3) $\log\left(\frac{\sqrt{a}}{b^{-4}c^3}\right)$

(6 puntos)

4) $-\log x + 2\log y - \frac{2}{3}\log z$

(4 puntos)

5) $\log_2 \frac{1}{32} + \log_3 \frac{1}{27} - \log_2 1$

(5 puntos)

6) $\ln(xy) - 2\ln\frac{x}{y}$

(6 puntos)

5) $\log_2 \frac{\sqrt{8}\sqrt[3]{16}}{2^{-4}}$

Lección 8: Ecuaciones Exponenciales y Logarítmicas

EJEMPLOS

1)
$$\log_3(4x-5)=\log_3(2x+1)$$
$$4x-5=2x+1$$
$$4x-2x=1+5$$

2)
$$\log_4(5+x)=3$$
$$5+x=4^3$$
$$5+x=64$$

3)
$$5^x=8$$
$$\log_5 5^x=\log_5 8$$
$$x=\log_5 8$$
$$x=\frac{\log 8}{\log 5}$$

4)
$$2\log_2 x+3\log_2 2=3\log_2 x-\log_2\tfrac{1}{32}$$
$$\log_2 x^2+\log_2 2^3=\log_2 x^3-\log_2\tfrac{1}{32}$$
$$\log_2 x^2+\log_2 8=\log_2 x^3-\log_2\tfrac{1}{32}$$
$$\log_2 8x^2=\log_2\frac{x^3}{\frac{1}{32}}$$
$$\log_2 8x^2=\log_2 32x^3$$
$$8x^2=32x^3$$
$$32x^3-8x^2=0$$
$$8x^2(4x-1)=0$$
$$8x^2=0 \qquad 4x-1=0$$
$$x^2=0 \qquad 4x=1$$

Como los logaritmos **NO** están definidos para el cero, ∴ x = 0 no es una solución.

5)
$$\log_2 x+\log_2(x+2)=3$$
$$\log_2[x(x+2)]=3$$
$$x(x+2)=2^3$$
$$x^2+2x-8=0$$
$$(x-2)(x+4)=0$$

Como los logaritmos **NO** están definidos para números negativos, ∴ $x=-4$ no es una solución.

- En el primer ejemplo como las bases de los logaritmos son iguales se igualaron los argumentos y se resolvió la ecuación resultante.
- En el segundo ejemplo se cambió de forma logaritmica a exponencial y se resolvió la ecuación resultante.

- En el tercer ejemplo se añadió el logaritmo correspondiente a ambos lados de la igualdad y se aplicó la fórmula de cambio de bases. Se aproximó el resultado a dos lugares decimales.

- En el cuarto ejemplo se aplicó las propiedades de suma, resta y exponentes en logaritmos y se cambió de forma logaritmica a exponencial. Se igualó a cero y se factorizó. Finalmente cada factor se igualó a cero para resolver las ecuaciones resultantes.

- En el quinto ejemplo se aplicó la propiedad de suma de logaritmos y se cambió de forma logaritmica a exponencial. Finalmente se resolvió la ecuación cuadrática resultante. Ua de las soluciones se descartó porque los logaritmos están definidos para números mayores que cero.

Ejercicio de práctica 28

Resuelve cada ecuación. Verifica si hay soluciones extrañas.

1) $\ln(6x-3) = \ln(x+7)$ 2) $\log_2(5x-9) = 4$ 3) $\log 2x + \log(x-5) = 2$

4) $\ln(8x-3) = \ln(6x+15)$ 5) $\log_4(x-6) = 3$ 6) $\log 10x + \log(x-3) = 2$

7) $\log_3(x+24) + \log_3 x = 4$ 8) $\log_5(3x-4) = \log_5 8$ 9) $\ln(12x-9) = \ln 3x$

10) $\log_3(x^2+2x-15) = 2$ 11) $\ln x + \ln(x+3) = 4$ 12) $2\log x = \log 361$

13) $\log_3 3x^2 + \log_3 3 = 2$ 14) $\ln(x-8) = \frac{3}{2}\ln 4$ 15) $\log_5 25^x = 8$

16) $4\log x + 3\log x - 2\log x = \log 1{,}024$ 17) $3^{\log_3 5x} = 10$ 18) $\ln e^x = 7$

19) $\log_7(2x-1) - 2\log_7 2 = \log_7(x+3) - 2\log_7 3$ 20) $e^{\ln x} = 4$

21) $2^x = 9$ 22) $3^x = 5$ 23) $8^{10x} = 19$ 24) $5e^{-0.2x} - 3 = 21$

25) $6^{5x} = 12$ 26) $13^{7x} = 32$ 27) $2e^{9x} + 11 = 18$ 28) $3e^{4x} - 13 = 17$

Puedes corroborar tus respuestas al final del módulo.

Lección 9: Desigualdades Exponenciales y Logarítmicas

EJEMPLOS

1) $6^x > 12$

$\log_6 6^x > \log_6 12$

$x > \log_6 12$

$x > \frac{\log 12}{\log 6}$

$x > 1.39$

2) $\ln x \leq 9$

$e^{\ln x} \leq e^9$

$x \leq e^9$

$0 < x \leq 8{,}103.08$

- ❖ En el primer ejemplo se aplicó el logaritmo correspondiente a cada lado de la desigualdad y se aplicó la fórmula de cambio de bases. Se aproximó el resultado a dos lugares decimales.

- ❖ En el segundo ejemplo se añadió la base e en ambos lados de la desigualdad y se aproximó el resultado a dos lugares decimales. Como el logaritmo no está definido para los negativos y el cero el resultado de la desigualdad se escribe en ese intervalo.

Ejercicio de práctica 29

Resuelve cada desigualdad. Escriba su respuesta en notación de intervalo.

1) $4^x < 18$ 2) $e^x > 6$ 3) $10^{x+1} < 2$

4) $10^{3x-12} > 2$ 5) $\log x + 7 < 35$ 6) $2 \ln x - 1 > 6$

7) $8^x > 48$ 8) $9^x \leq 36$ 9) $\ln x \geq 4$

10) $\log_3 x < 3$ 11) $5^{3x-4} < 11$ 12) $e^{4x+3} > 15$

13) $-2 \log_7 x + 4 \leq 6$ 14) $-4 \log_3 x - 3 \geq 5$ 15) $-6 \log_4 x \geq -12$

Puedes corroborar tus respuestas al final del módulo.

Nombre: ____________________________ Fecha: ___________________________

Grupo: ________ Fundamentos de Preparación al Cálculo

Tarea #13

Resuelva cada desigualdad. Escriba su respuesta en notación de intervalo. Realice el procedimiento completo. (30 puntos)

(4 puntos)

1) $5^x < 14$

(4 puntos)

2) $10^{x-2} < 7$

(5 puntos)

3) $3\ln x + 2 \leq 6$

(6 puntos)

4) $4^{2x+1} < 10$

(5 puntos)

5) $e^{3x-5} > 9$

(6 puntos)

6) $-2\log_5 x + 6 \leq 8$

Lección 10: Aplicaciones con Logaritmos

De la misma forma que los modelos exponenciales representan situaciones de la vida real, los logaritmos se usan para resolver diferentes fenómenos. Observa y estudia las siguientes situaciones para que veas cuán útil son los logaritmos.

EJEMPLOS

1) El crecimiento de un bosque viene dado por la función $F(t) = A \cdot (1+i)^t$ donde $F(t)$ es la madera que habrá dentro de t años, A la madera actual e i la tasa de crecimiento anual $i = 0.02$ y se mantiene constante. Calcula el tiempo que tardará en duplicarse la madera del bosque.

Datos

$i = 0.02$

$$F(t) = A \cdot (1+i)^t$$

$$2A = A \cdot (1+0.02)^t$$

$$2A = A \cdot (1.02)^t$$

$$\frac{2A}{A} = (1.02)^t$$

$$2 = (1.02)^t$$

$$\log 2 = \log\,(1.02)^t$$

$$\log 2 = \mathrm{t} \cdot \log(1.02)$$

$$t = \frac{\log 2}{\log(1.02)}$$

$$t \approx \frac{0.3010}{0.0086}$$

$$t \approx 35$$

La madera del bosque se duplicará en aproximadamente 35 años.

Recuperado el 1 de octubre de 2020 de www.ejerciciosweb.com

2) Supongamos que se invierten $1,000.00 al 10% de interés compuesto continuo, ¿cuánto tiempo se necesitaría para que se duplique esta inversión?

- ❖ La fórmula de interés compuesto continuo es $A = Pe^{rt}$, donde A representa el valor de la inversión a un tiempo t; P representa el principal invertido; r representa la razón de interés a la que se invierte y t representa el tiempo total que dura la inversión.

Datos

$A = \$2{,}000$

$P = \$1{,}000$

$r = 10\% = \frac{10}{100} = 0.10$

$$2000 = 1000e^{(0.10)t}$$

$$\frac{2000}{1000} = e^{(0.10)t}$$

$$2 = e^{(0.10)t}$$

$$\ln 2 = \ln e^{(0.10)t}$$

$$\ln 2 = (0.10)t$$

$$\frac{\ln 2}{0.10} = t$$

$$\frac{0.6931}{0.10} \approx t$$

$$t \approx 6.93$$

Se necesita aproximadamente 7 años para que se duplique la inversión.

3) En la escala de Ritcher, la magnitud R de un terremoto de intensidad I está dado por la fórmula:

$$R = \log \frac{I}{I_0}$$

donde $I_0 = 1$ es la intesidad mínima usada para comparar. ¿Cuál es la intesidad del terremoto ocurrido en Puerto Rico el 11 de octubre de 1918 si su magnitud fue de 7.3 en la escala de Ritcher?

Datos

$R = 7.3$

$I_0 = 1$

$$R = \log \frac{I}{I_0}$$

$$7.3 = \log \frac{I}{1}$$

$$7.3 = \log I$$

$$10^{7.3} = 10^{\log I}$$

$$I = 10^{7.3}$$

$$I \approx 19{,}952{,}623$$

La intensidad del terremoto fue aproximadamente 19,952,623.

4) El nivel de intensidad del sonido, en decibeles (dB), está dado por:

$$B = 10\log\frac{I}{I_0}$$

donde I es la intensidad del sonido medida en watts por metro cuadrado W/m^2 y la intensidad más baja que se puede escuchar es $I_0 = 10^{-12}\, W/m^2$. ¿Cuán fuerte es el sonido del tráfico en una ciudad si su intensidad es de aproximadamente $10^{-4}\, W/m^2$?

Datos

$I_0 = 10^{-4}$

$$B = 10\log\frac{I}{I_0}$$

$$B = 10\log\frac{10^{-4}}{10^{-12}}$$

$$B = 10\log 10^{-4-(-12)}$$

$$B = 10\log 10^{-4+12}$$

$$B = 10\log 10^{8}$$

$$B = 10(8)$$

$$B = 80$$

El nivel de intensidad del sonido del tráfico de una ciudad es 80 dB.

Recuerda

Recuerda identificar los datos y escoger el modelo o la fórmula que represente la

Ejercicio de práctica 30

Resuelve cada situación. Escribe tu respuesta a dos lugares decimales.

1) El servicio de control de calidad de una empresa que fabrica lavadoras ha comprobado que el porcentaje de lavadoras que sigue funcionando al cabo de ***t*** años viene dada por la función:

$$f(x) = \left(\frac{8}{9}\right)^t$$

¿Cuánto tiempo deberá transcurrir para que funcione el 40% de las lavadoras de la fábrica?

2) Supongamos que se invierten $3,000.00 al 15% de interés compuesto continuo, ¿cuánto tiempo se necesitaría para que se duplique esta inversión?

3) En la escala de Ritcher, la magnitud R de un terremoto de intensidad I está dado por la fórmula:

$$R = \log \frac{I}{I_0}$$

donde $I_0 = 1$es la intesidad mínima usada para comparar. ¿Cuál es la intesidad del terremoto ocurrido en Puerto Rico el 7 de enero de 2020 si su magnitud fue de 6.0 en la escala de Ritcher?

4) El nivel de intensidad del sonido, en decibeles (dB), está dado por:

$$B = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

donde I es la intensidad del sonido medida en watts por metro cuadrado W/m^2 y la intensidad más baja que se puede escuchar es $I_0 = 10^{-12}\, W/m^2$. ¿Cuán fuerte es el sonido de los aparatos personales de música si su intensidad es de aproximadamente $10^{-2}\, W/m^2$?

Si la comprensión del contenido de esta lección se te hace difícil, debes solicitar ayuda de tus familiares, amigos o maestros.

Puedes corroborar tus respuestas al final del módulo.

Nombre: ___________________________ Fecha: __________________________

Grupo: ________ Fundamentos de Preparación al Cálculo

Examen: Función Exponencial y Función Logarítmica

I. Resuelva cada ecuación exponencial. Realice el procedimiento **completo**. (30 puntos)

1) $9^x = 729$

2) $e^{4x-3} = 1$

3) $7^2 = (x+1)^2$

4) $(3x-8)^4 = (6-2x)^4$

5) $6^{x^2} = 6^{3x-18}$

6) $1000^x = \left(\frac{1}{10}\right)^{x-4}$

7) $3^{-x} = \frac{1}{81}$ 8) $16^{x} = 0.25$

II. Exprese cada ecuación en forma logarítmica o forma exponencial según aplique. (4 puntos)

1) $e^{x} = 6$ 2) $7 = \sqrt[3]{343}$

3) $\log 0.0001 = -4$ 4) $-1 = \ln\left(\frac{1}{e}\right)$

III. Determine el valor de *b, x, y*. Realice el procedimiento **completo**. (10 puntos)

1) $\log_{1/3} 243 = y$ 2) $\log_{b} \frac{1}{512} = -9$ 3) $\log_{2} \frac{1}{x} = 3$

IV. Evalúe cada logaritmo usando la fórmula de cambio de base. Exprese el resultado a la diezmilésima más cercana. Realice el procedimiento **completo**. (6 puntos)

1) $\log_{1/2} 5$

2) $\log_{\pi} 2.7$

3) $\log_{\sqrt{2}} 9$

V. Resuelva. Realice el procedimiento **completo**. Verifique si hay soluciones extrañas. (20 puntos)

1) $\ln(2x-3) = \ln x + \ln(x-2)$

2) $\log_3(9x) - \log_3(x-8) = 4$

3) $4^{3x+2} = 71$

4) $3^{\log_3 x} = 2$

5) $\ln e^x = 4$

VI. Use las propiedades de logaritmos para desarrollar o simplificar cada expresión.

(30 puntos)

1) Use $\log_5 2 \approx 0.43$ y $\log_5 7 \approx 1.21$ para evaluar cada logaritmo en los siguientes tres ejercicios.

a) $\log_5 56$

b) $\log_5 \frac{2}{7}$

c) $\log_5 49$

3) $\log_2 \frac{\sqrt{x-1}}{9}$

4) $\ln \sqrt[4]{x^3(x^2+3)}$

5) $-4\log_6 2x + 3\log_6 x^2$

6) $4[\ln z + \ln(z+5)] - 2\ln(z-5)$

"La vida te pone obstáculos, pero los límites los pones tú"

¡Éxito!

CLAVES DE RESPUESTA DE EJERCICIOS DE EJERCICIOS DE PRÁCTICA

Es tu turno:

-8	1	-1	6
3	2	-4	-3
3	-4	4	-5
0	-1	-1	0

$$-8+1-8+6=\ -2$$
$$3+2-4-3=\ -2$$
$$3-4+4-5=\ -2$$
$$0-1-1+0=-2$$

Es tu turno: Factorización

1. x^2+2x+1

   $(x+1)(x+1)$

2. $x^2+7x+10$

   $(x+5)(x+2)$

3. $x^2-2x-15$

   $(x-5)(x+3)$

Ejercicios de practica #2

Traduce las siguientes expresiones en lenguaje simbólico. (Indique si es una expresión algebraica o una ecuación).

1. 2x + 20 = 70
2. $3x^2$-4^a
3. $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^3$
4. x -10 = 20

5. $\sqrt{\boldsymbol{a}} = \mathbf{25}$
6. 2x + 3 = 15
7. $x^3 = 27$

Ejercicio de practica # 3

Exprese cada conjunto en notación de intervalos.

1. $[-3, 5]$
2. $(-2, 0]$

Construye la gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones en el mismo plano e identifícalas con colores diferentes. (Valor 30 puntos)

a.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	3	2	1	0	1	2	3

b.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	1	-1	0	1	4	9

c.

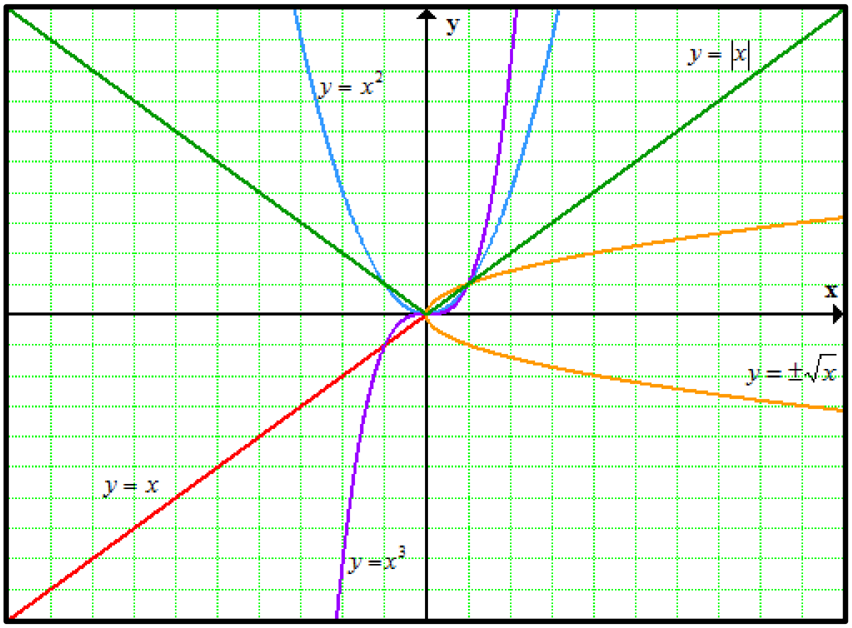
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-27	-8	-1	0	1	8	27

d.

x	0	1	9
y	0	1	3
	0	-1	-3

e.

x		-3	-2	-1	0	1	2	3
y		3	2	1	0	1	2	3



EVALUACIÓN: Valor (50 puntos)

Trabajarás cada una de las partes del examen. Al trabajarlo realizarás los cómputos necesarios para hallar la solución de los diferentes ejercicios. Luego, lo entregarás a tu m para ser evaluado**.**

I. Indica si los pares de números describen una función. Si es así, identifica el dominio y el rango. Si no, explica por qué.

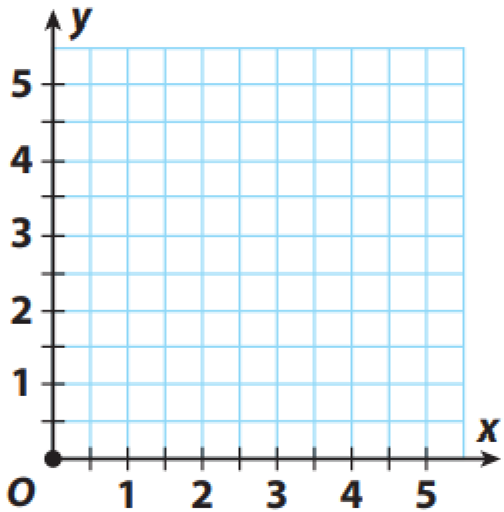
(36,6), (49,7), (64, 6), (36, -6) (49,-5) y (64,6)

II. María tiene una tarjeta de regalo de $5 para descargar música. Cada descarga por canción cuesta $1. La cantidad de dinero que queda en la tarjeta, en dólares, se puede representar con la función f(x) = 5 – x, donde x es el número de canciones descargadas.

A. Usa la función para completar la tabla.

x	0					5
***f*(*x*)**						

B. Representa gráficamente la función.



C. Identifica el dominio y el rango de la función:

____

____

III. Revuelve.

José tiene $15 y ahorra $2.50 cada mes. Rafael tiene $0 y ahorra $3.50 cada mes. Los ahorros de José después de x meses se pueden representar con la función $f(x) = 2.5x + 15$. Los ahorros de Rafael después de x meses se pueden representar con la función $g(x) = 3.5x$

a. ¿Después de cuántos meses ambas tendrán la misma cantidad de ahorros? Halla el valor de x que hace que $f(x) = g(x)$.
b. Explica cómo comprobar tu trabajo.
c. Explica cómo sería la gráfica del par de funciones.

IV, Determina el máximo o mínimo de la siguiente función $x^2 – 12x + 36$

V. Sea la función cuadrática $x^2 + 4x – 7$. Encuentre:

- Interceptos en x y y
- Vértice
- Eje de simetría

- Concavidad
- Gráfica
- Dominio
- Campo de valores o rango

Ejercicio de práctica 1

1) $(xy^4)(x^2y^3) = x^{1+2}y^{4+3} = x^3y^7$

2) $3^2a^{2(2)}b^2 = 9a^4b^2$

3) $(2a^4b)^3[(-2b)^3]^2 = \left(2^3a^{4(3)}b^3\right)(-2b)^6$

$= \left(2^3a^{4(3)}b^3\right)[(-2)^6b^6]$

$= (8a^{12}b^3)[64b^6]$

$= 8(64)a^{12}b^{3+6}$

$= 512a^{12}b^9$

4) $5(2)xy^3 = 10xy^3$

5) $\frac{(-5m)^4}{(-25m^2)^2} = \frac{(-5)^4m^4}{(-25)^2(m^2)^2} = \frac{625m^4}{625m^4} = 1$

6) $\frac{(-3)^2a^{2(2)}b^{4(2)}}{4^2a^{-3(2)}} = \frac{9a^4b^8}{16a^{-6}} = \frac{9a^{4+6}b^8}{16}$

$= \frac{9a^{10}b^8}{16}$

Ejercicio de práctica 2

1) $3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$

$3^2 = 9$

2) $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$

$5^2 = 25$

3) $-6 + 4^{-3} = -6 + \frac{1}{4^3} = -6 + \frac{1}{64} = -\frac{383}{64}$

$-6 + 4^2 = -6 + 16 = 10$

4) $8 + 3^{-3} = 8 + \frac{1}{3^3} = 8 + \frac{1}{27} = \frac{217}{27}$

$8 + 3^2 = 8 + 9 = 17$

5) $7 \cdot 2^{-3} = 7 \cdot \frac{1}{2^3} = 7 \cdot \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

$7 \cdot 2^2 = 7 \cdot 4 = 28$

6) $9 \cdot 4^{-3} = 9 \cdot \frac{1}{4^3} = 9 \cdot \frac{1}{64} = \frac{9}{64}$

$9 \cdot 4^2 = 9 \cdot 16 = 144$

Ejercicio de práctica 3

1) crecimiento exponencial

2) decrecimiento exponencial

3) decrecimiento exponencial

4) crecimiento exponencial

5) decrecimiento exponencial

6) crecimiento exponencial

Ejercicio de práctica 4

1) $f(-1) = b^{-1} = \frac{1}{3};\ b = 3;\ f(x) = 3^x$

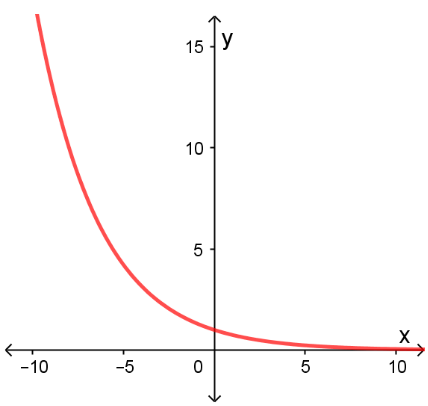
2) $f(1) = b^1 = 5;\ b = 5;\ f(x) = 5^x$

3) $f(-2) = b^{-2} = 9;\ b = \frac{1}{3};\ f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

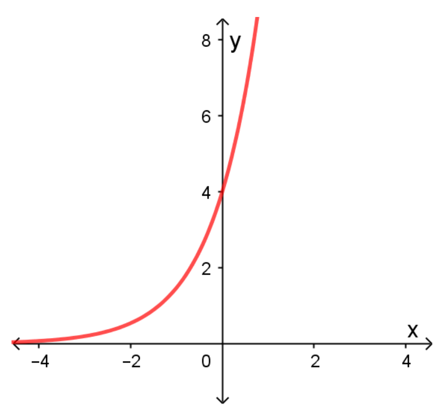
4) $f(3) = b^3 = \frac{1}{64};\ b = \frac{1}{4};\ \ f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

Ejercicio de práctica 5

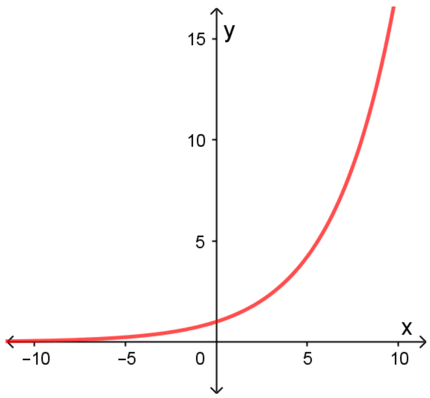
1) $f(x) = (0.75)^x$ decreciente



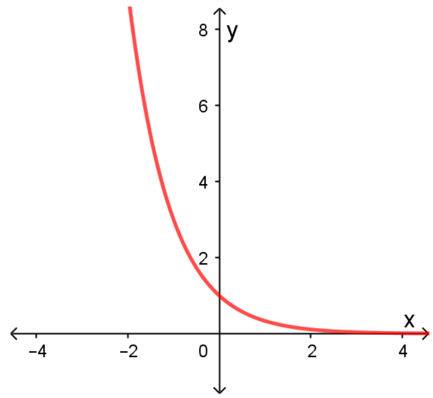
2) $f(x) = 4^x$ creciente



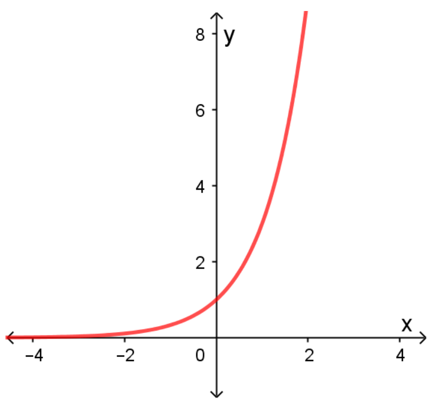
3) $f(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^x$ creciente



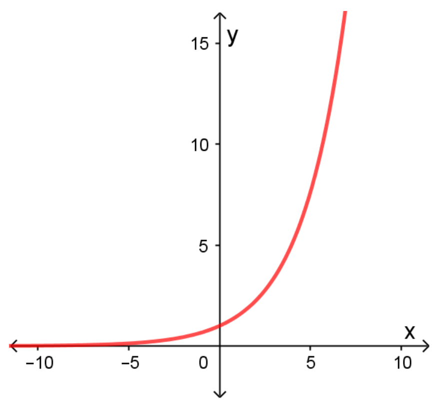
4) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ decreciente



5) $f(x) = 3^x$ creciente



6) $f(x) = (1.5)^x$ creciente



Ejercicio de práctica 6

1) d

2) b

3) c

4) a

Ejercicio de práctica 7

1) $e^4 \approx 54.89815$

2) $2.04e^8 \approx 2.04(2{,}980.95799) \approx 6{,}081.15430$

3) $\frac{1}{e^{-0.5}} = e^{0.5} \approx 1.64872$

4) $e^{-2} = \frac{1}{e^2} \approx 0.13534$

5) $\frac{6}{e^5} = \frac{6}{148.41316} \approx 0.04043$

6) $e^{-7} = \frac{1}{e^7} \approx 0.00091$

Ejercicio de práctica 8

1) $e^2 \cdot e^9 = e^{2+9} = e^{11}$

2) $\frac{3e^{15}}{27e^{-7}} = \frac{e^{22}}{9}$

3) $(2e^4)^{11} = 2^{11} \cdot e^{4(11)} = 2{,}048e^{44}$

4) $e^{18} \cdot e^{-4} \cdot e^{10} = e^{18+-4+10} = e^{24}$

5) $\frac{56e^{-23}}{7e^{-18}} = \frac{56e^{18}}{7e^{23}} = \frac{8}{e^5}$

6) $(6e^{-2x})^7 = \left(\frac{6}{e^{2x}}\right)^7 = \frac{6^7}{e^{2x(7)}} = \frac{279{,}936}{e^{14x}}$

Ejercicio de práctica 9

1) decrecimiento exponencial

2) crecimiento exponencial

3) crecimiento exponencial

4) crecimiento exponencial

5) decrecimiento exponencial

6) decrecimiento exponencial

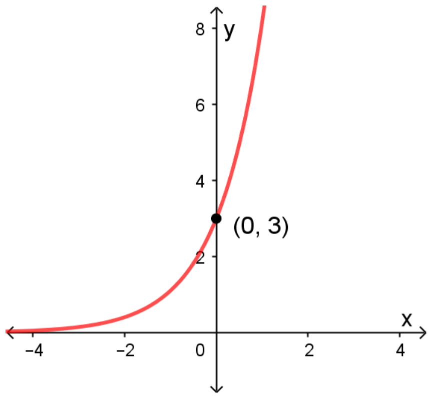
Ejercicio de práctica 10

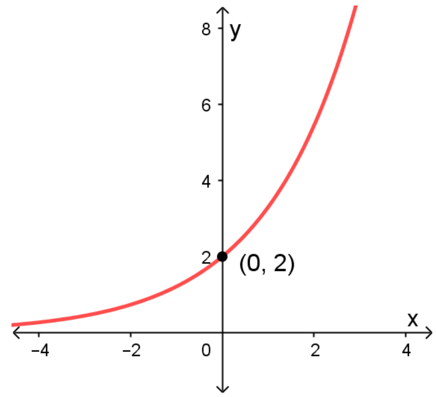
1)

x	$f(x) = 3e^{x}$
-2	0.41
-1	1.10
-0.5	1.82
0	3
0.5	4.95
1	8.15
2	22.17

2)

x	$f(x) = 2e^{-0.5x}$
-3	8.96
-2	5.44
-1	3.30
0	2
1	1.21
2	0.74
3	0.45





Ejercicio de práctica 11

1) $e^x = e^5$

$x = 5$

2) $7^{3x+5} = 7^{1-x}$

$3x + 5 = 1 - x$

$3x + x = 1 - 5$

$\frac{4x}{4} = \frac{-4}{4}$

$x = -1$

3) $e^{2x} = e^{3x-1}$

$2x = 3x - 1$

$1 = 3x - 2x$

$1 = x$

$x = 1$

4) $5^{x-3} = 25^{x-5}$

$5^{x-3} = 5^{2(x-5)}$

$5^{x-3} = 5^{2x-10}$

$x - 3 = 2x - 10$

$10 - 3 = 2x - x$

$7 = x$

$x = 7$

5) $6^{2x-6} = 36^{3x-5}$

$6^{2x-6} = 6^{2(3x-5)}$

$6^{2x-6} = 6^{6x-10}$

$2x - 6 = 6x - 10$

$10 - 6 = 6x - 2x$

$\frac{4}{4} = \frac{4x}{4}$

$x = 1$

6) $100^x = \left(\frac{1}{10}\right)^{x-3}$

$10^{2x} = (10^{-1})^{x-3}$

$10^{2x} = 10^{-x+3}$

$2x = -x + 3$

$2x + x = 3$

$\frac{3x}{3} = \frac{3}{3}$

$x = 1$

7) $8^x = \frac{1}{2}$

8) $e^x = \frac{e^{4-2x}}{e^{10}}$

9) $16^x = \frac{1}{4}$

$2^{3x} = 2^{-1}$

$\frac{3x}{3} = \frac{-1}{3}$

$x = -\frac{1}{3}$

$e^{x} = e^{4-2x-10}$

$e^{x} = e^{-2x-6}$

$x = -2x - 6$

$2x + x = -6$

$\frac{3x}{3} = \frac{-6}{3}$

$x = -2$

$4^{2x} = 4^{-1}$

$\frac{2x}{2} = \frac{-1}{2}$

$x = -\frac{1}{2}$

10) $5^{x} = 125$

$5^{x} = 5^{3}$

$x = 3$

11) $3^{x} = 243$

$3^{x} = 3^{5}$

$x = 5$

12) $2^{3x-2} = 16$

$2^{3x-2} = 2^{4}$

$3x - 2 = 4$

$3x = 4 + 2$

$\frac{3x}{3} = \frac{6}{3}$

$x = 2$

13) $e^{10x} = \frac{1}{e^{-4}}$

$e^{10x} = e^{4}$

$\frac{10x}{10} = \frac{4}{10}$

$x = \frac{4}{10}$

$x = \frac{2}{5}$

14) $27^{x} = 3^{2x+3}$

$3^{3x} = 3^{2x+3}$

$3x = 2x + 3$

$3x - 2x = 3$

$x = 3$

15) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x} = 8$

$2^{-x} = 2^{3}$

$-x = 3$

$(-1) - x = 3(-1)$

$x = -3$

13) $e^{10x} = \frac{1}{e^{-4}}$

$e^{10x} = e^{4}$

$\frac{10x}{10} = \frac{4}{10}$

14) $27^{x} = 3^{2x+3}$

$3^{3x} = 3^{2x+3}$

$3x = 2x + 3$

15) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x} = 8$

$2^{-x} = 2^{3}$

$-x = 3$

$x = \frac{2}{5}$

$3x - 2x = 3$

$x = 3$

$(-1) - x = 3(-1)$

$x = -3$

16) $9^{4x} = \frac{1}{81}$

$9^{4x} = \frac{1}{9^2}$

$9^{4x} = 9^{-2}$

$\frac{4x}{4} = \frac{-2}{4}$

$x = -\frac{1}{2}$

17) $25^x = 0.2$

$5^{2x} = \frac{2}{10}$

$5^{2x} = \frac{1}{5}$

$5^{2x} = 5^{-1}$

$\frac{2x}{2} = \frac{-1}{2}$

$x = -\frac{1}{2}$

18) $8^{x^2} = 8^{5x+6}$

$x^2 = 5x + 6$

$x^2 - 5x - 6 = 0$

$(x-6)(x+1) = 0$

$x - 6 = 0$ ó $x + 1 = 0$

$x = 6$ $\quad$ $x = -1$

19) $(2^{x+1})^2 = 64$

$2^{2x+2} = 2^6$

$2x + 2 = 6$

$2x = 6 - 2$

$\frac{2x}{2} = \frac{4}{2}$

$x = 2$

20) $2^{x+1} + 2^{x-1} = 20$

$2^x \cdot 2^1 + 2^x \cdot 2^{-1} = 20$

$2^x \cdot 2 + 2^x \cdot \frac{1}{2} = 20$

$2^x\left(2 + \frac{1}{2}\right) = 20$

$2^x\left(\frac{5}{2}\right) = 20$

$2^x = 20\left(\frac{2}{5}\right)$

$2^x = 4(2)$

$2^x = 8$

$2^x = 2^3$

$x = 3$

21) $e^x \cdot e^{3x} = e^{x-1}$

$e^{x+3x} = e^{x-1}$

$e^{4x} = e^{x-1}$

$4x = x - 1$

$4x - x = -1$

$\frac{3x}{3} = \frac{-1}{3}$

$x = -\frac{1}{3}$

22) $e = e^{20x} \cdot e^{-4}$

$e = e^{20x-4}$

$1 = 20x - 4$

$1 + 4 = 20x$

23) $5^{-x} = \frac{1}{25}$

$5^{-x} = 25^{-1}$

$5^{-x} = 5^{2(-1)}$

$5^{-x} = 5^{-2}$

24) $64^x = 4^{4x+1}$

$3x = 4x + 1$

$-1 = 4x - 3x$

$-1 = x$

$\frac{5}{20} = \frac{20x}{20}$

$x = \frac{1}{4}$

$-x = -2$

$(-1) - x = -2(-1)$

$x = 2$

$x = -1$

Ejercicio de práctica 12

1) $f(x) = \log_2 x$

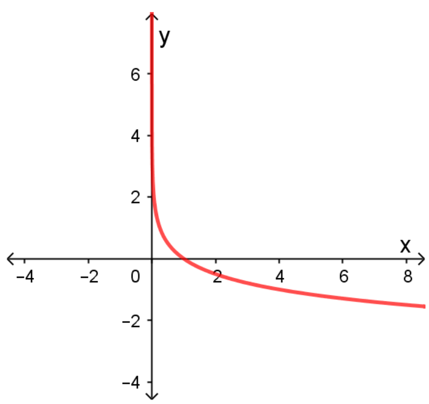
2) $f(x) = \log_{1/3} x$

3) $f(x) = \log_5 x$

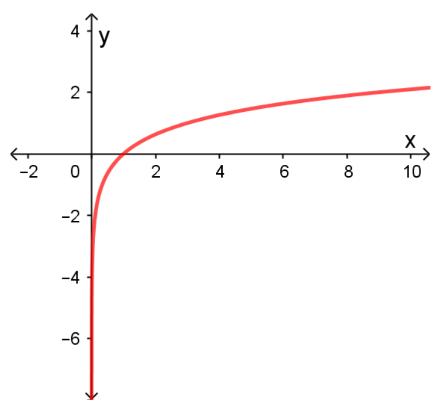
4) $f(x) = \log_4 x$

Ejercicio de práctica 13

1) $f(x) = \log_{1/4} x$

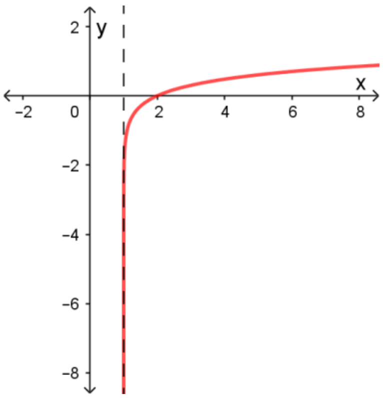


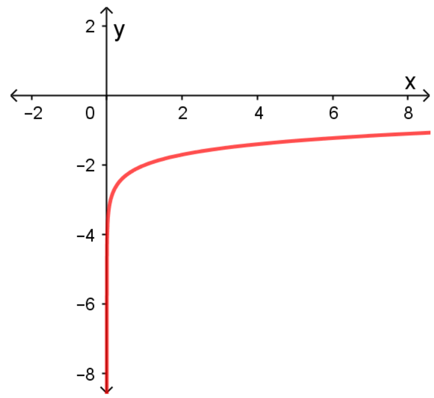
2) $f(x) = \log_3 x$



3) $f(x) = \log(x - 1)$

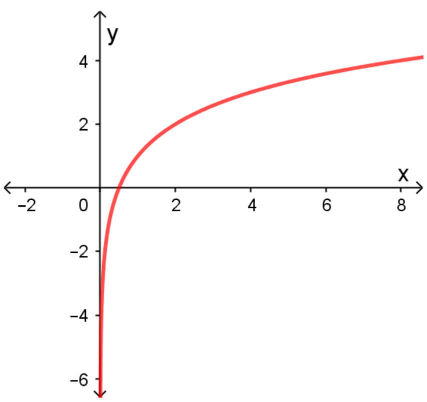
4) $f(x) = \log x - 2$

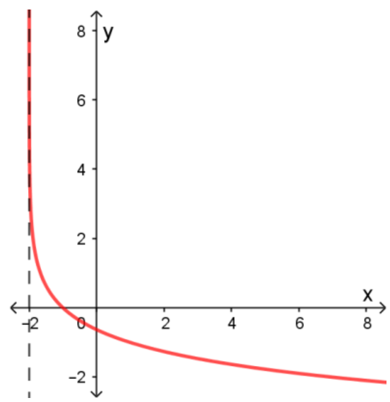




5) $f(x) = \log_2 x + 1$

6) $f(x) = \log_{1/3}(x + 2)$





Ejercicio de práctica 14

1) d

2) c

3) b

4) a

Ejercicio de práctica 15

1) $\log_9 81 = 2$

2) $\log 0.01 = -2$

3) $\log_{27} 9 = \frac{2}{3}$

4) $\log_5 \left(\frac{1}{125}\right) = -3$

5) $\log_7 1 = 0$

6) $\log_8 8 = 1$

7) $\log_{64} 4 = \frac{1}{3}$

8) $\log_4 8 = \frac{3}{2}$

9) $\log_{16}\left(\frac{1}{16}\right) = -1$

10) $\log_{12}\left(\frac{1}{144}\right) = -2$

11) $\log_4 0.25 = -1$

12) $\log_{49} 7 = \frac{1}{2}$

13) $\ln e = 1$

14) $\ln 1 = 0$

15) $\ln 20.09 \approx 3$

Ejercicio de práctica 16

1) $4^2 = 16$

2) $5^0 = 1$

3) $13^1 = 13$

4) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = 5$

5) $7^3 = 343$

6) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16$

7) $3^{-1} = \frac{1}{3}$

8) $3^4 = 81$

9) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-6} = 64$

10) $10^2 = 100$

11) $\left(\sqrt{9}\right)^2 = 9$

12) $8^{1/3} = 2$

13) $e^0 = 1$

14) $e^1 = e$

15) $e^2 \approx 7.39$

Ejercicio de práctica 17

1) $\log_7 343 = y$

$$7^y = 343$$

$$7^y = 7^3$$

$$y = 3$$

2) $\log_5 0.2 = y$

$$5^y = 0.2$$

$$5^y = \frac{2}{10}$$

$$5^y = \frac{1}{5}$$

$$5^y = 5^{-1}$$

3) $\log_{1/6} 216 = y$

$$\left(\frac{1}{6}\right)^y = 216$$

$$6^{-y} = 6^3$$

$$-y = 3$$

$$(-1) - y = 3(-1)$$

$y = -1$

$y = -3$

4) $\log_{144} 12 = y$

$144^y = 12$

$12^{2y} = 12$

$\frac{2y}{2} = \frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{2}$

5) $\log_2 x = 5$

$x = 2^5$

$x = 32$

6) $\log_{27} x = \frac{1}{3}$

$x = 27^{1/3}$

$x = \sqrt[3]{27}$

$x = 3$

7) $\log x = 6$

$x = 10^6$

$x = 1{,}000{,}000$

8) $\log_5 x = -4$

$x = 5^{-4}$

$x = \frac{1}{5^4}$

$x = \frac{1}{625}$

9) $\log_b 128 = 7$

$b^7 = 128$

$b^7 = 2^7$

$b = 2$

10) $\log_b 10{,}000 = 4$

$b^4 = 10{,}000$

$b^4 = 10^4$

$b = 10$

11) $\log_b 11 = 1$

$b = 11$

12) $\log_b \frac{1}{512} = -3$

$b^{-3} = \frac{1}{512}$

$b^{-3} = \frac{1}{8^3}$

$b^{-3} = 8^{-3}$

$b = 8$

13) $\log 0.001 = y$

$10^y = 0.001$

$10^y = 10^{-3}$

$y = -3$

14) $\log_b 18 = -1$

$b = 18^{-1}$

$b = \frac{1}{18}$

15) $\log_3 \frac{1}{x} = 2$

$\frac{1}{x} = 3^2$

$\frac{1}{x} = 9$

$x = \frac{1}{9}$

Ejercicio de práctica 18

1) $f(x) = 5^x$

$$y = 5^x$$
$$x = 5^y$$
$$\log_5 x = \log_5 5^y$$
$$\log_5 x = y$$
$$y = \log_5 x$$
$$f^{-1}(x) = \log_5 x$$

2) $g(x) = \log x$

$$y = \log x$$
$$x = \log y$$
$$10^x = 10^{\log y}$$
$$10^x = y$$
$$y = 10^x$$
$$g^{-1}(x) = 10^x$$

3) $h(x) = 2^{x+1}$

$$y = 2^{x+1}$$
$$x = 2^{y+1}$$
$$\log_2 x = \log_2 2^{y+1}$$
$$\log_2 x = y + 1$$
$$y = \log_2 x - 1$$
$$h^{-1}(x) = \log_2 x - 1 = \frac{\log x}{\log 2} - 1$$

4) $F(x) = \ln(x - 1)$

$$y = \ln(x - 1)$$
$$x = \ln(y - 1)$$
$$e^x = e^{\ln(y-1)}$$
$$e^x = y - 1$$
$$y = e^x + 1$$
$$F^{-1}(x) = e^x + 1$$

5) $G(x) = \log_{1/3}(x + 1)$

$$y = \log_{1/3}(x + 1)$$
$$x = \log_{1/3}(y + 1)$$
$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{1/3}(y+1)}$$
$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = y + 1$$
$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 1$$
$$G^{-1}(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 1$$

6) $H(x) = e^{4x}$

$$y = e^{4x}$$
$$x = e^{4y}$$
$$\ln x = \ln e^{4y}$$
$$\frac{\ln x}{4} = \frac{4y}{4}$$
$$y = \frac{1}{4}\ln x$$
$$H^{-1}(x) = \frac{1}{4}\ln x$$

Ejercicio de práctica 19

1) 2

2) $\log_4 4^{3x} = 3x$

3) $x - 3$

4) 9

5) 21

6) $5x$

Ejercicio de práctica 20

1) $f(x) = \log_{1/5} x$

$$y = \log_{1/5} x$$

$$x = \log_{1/5} y$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^x = \left(\frac{1}{5}\right)^{\log_{1/5} y}$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^x = y + 1$$

$$y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$$

$$f^{-1}(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$$

2) $f(x) = \log_7 x$

$$y = \log_7 x$$

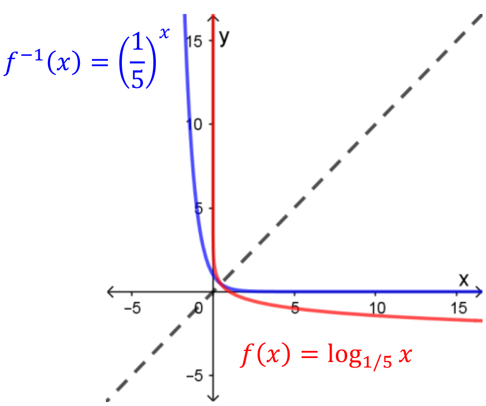
$$x = \log_7 y$$

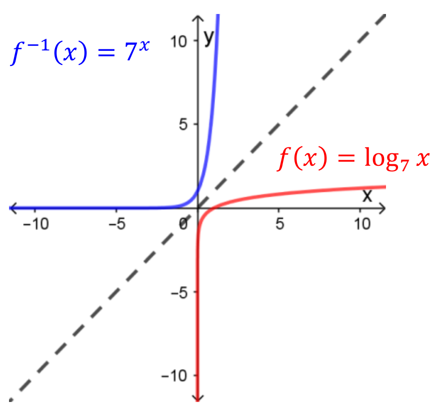
$$7^x = 7^{\log_7 y}$$

$$7^x = y$$

$$y = 7^x$$

$$f^{-1}(x) = 7^x$$

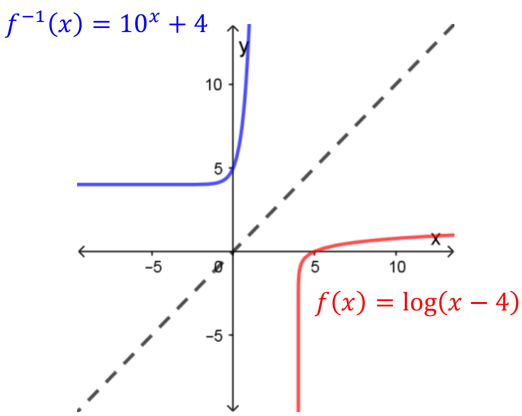




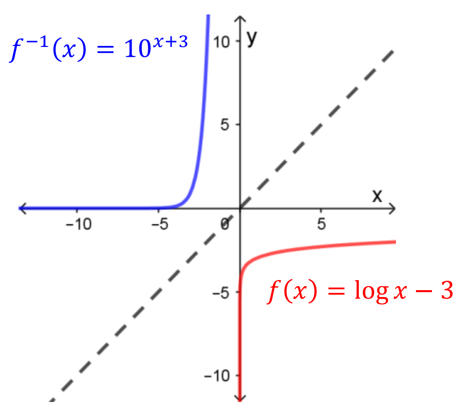
3) $f(x) = \log(x - 4)$

4) $f(x) = \log x - 3$

$$y = \log(x-4)$$
$$x = \log(y-4)$$
$$10^x = 10^{\log(y-4)}$$
$$10^x = y-4$$
$$y = 10^x + 4$$
$$f^{-1}(x) = 10^x + 4$$



$$y = \log x - 3$$
$$x = \log y - 3$$
$$x + 3 = \log y$$
$$10^{x+3} = 10^{\log y}$$
$$y = 10^{x+3}$$
$$10^{x+3} = y$$
$$f^{-1}(x) = 10^{x+3}$$

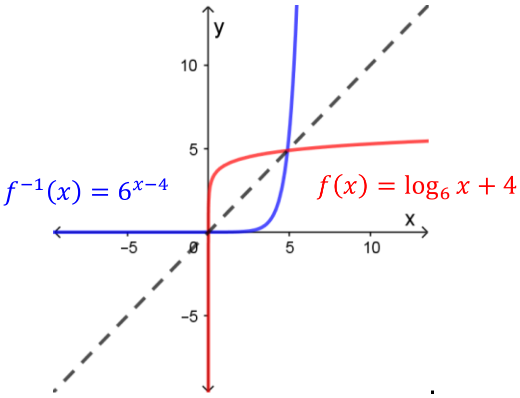


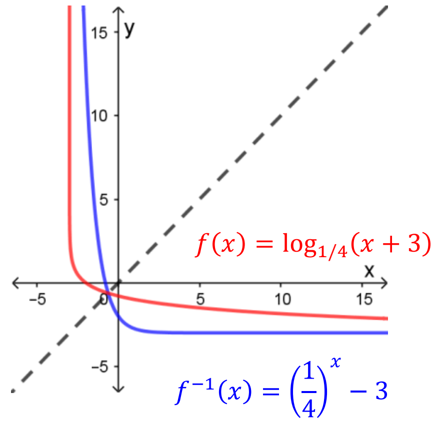
5) $f(x) = \log_6 x + 4$

$$y = \log_6 x + 4$$
$$x = \log_6 y + 4$$
$$x - 4 = \log_6 y$$
$$6^{x-4} = 6^{\log_6 y}$$
$$6^{x-4} = y$$
$$y = 6^{x-4}$$
$$f^{-1}(x) = 6^{x-4}$$

6) $f(x) = \log_{1/4}(x+3)$

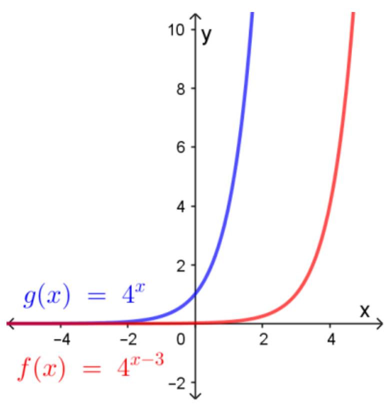
$$y = \log_{1/4}(x+3)$$
$$x = \log_{1/4}(y+3)$$
$$\left(\frac{1}{4}\right)^x = \left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{1/4}(y+3)}$$
$$\left(\frac{1}{4}\right)^x = y + 3$$
$$\left(\frac{1}{4}\right)^x - 3 = y$$
$$y = \left(\frac{1}{4}\right)^x - 3$$
$$f^{-1}(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x - 3$$



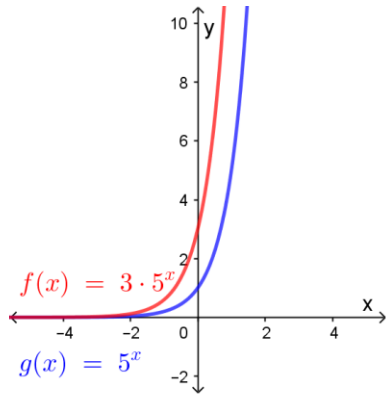


Ejercicio de práctica 21

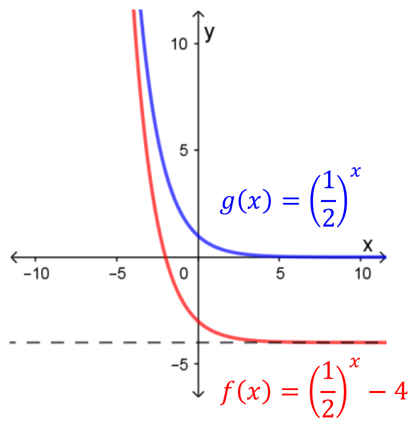
1) $f(x) = 4^{x-3} \rightarrow$ Desplazamiento horizontal tres unidades a la derecha.



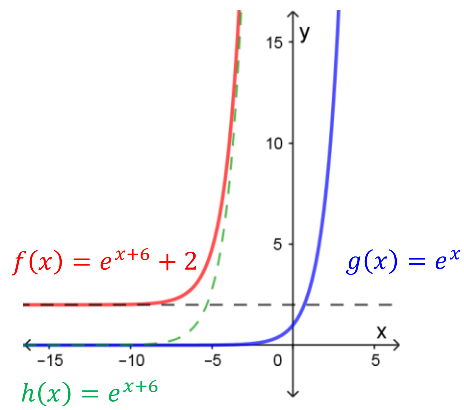
2) $f(x) = 3(5^x) \rightarrow$ Expansión o alargamiento vertical por un factor de tres.



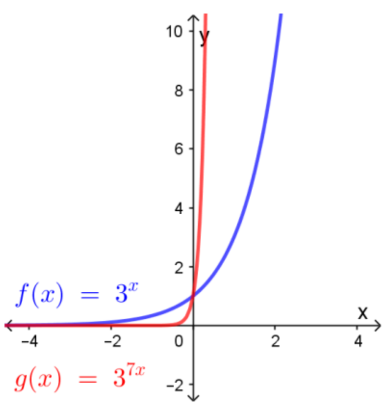
3) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 4 \rightarrow$ Desplazamiento vertical cuatro unidades hacia abajo.



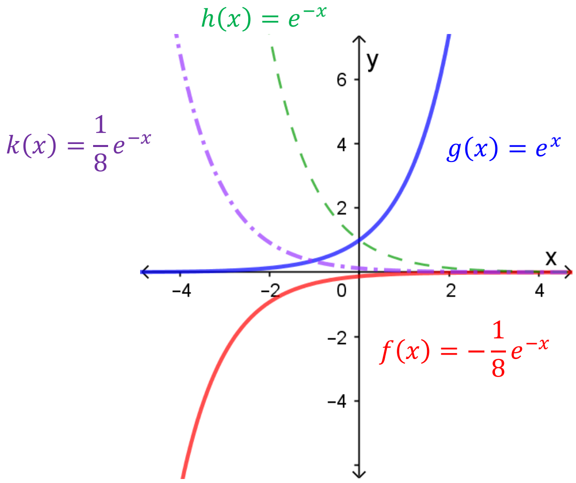
4) $f(x) = e^{x+6} + 2 \rightarrow$ Desplazamiento horizontal seis unidades hacia la izquierda, desplazamiento vertical dos unidades hacia arriba.



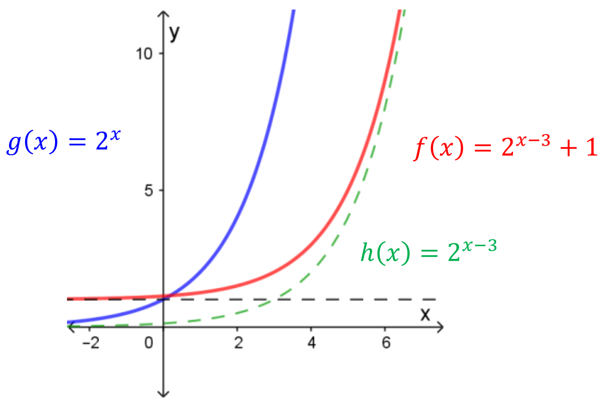
5) $f(x) = 3^{7x} \rightarrow$ Contracción o encogimiento horizontal por un factor de 7.



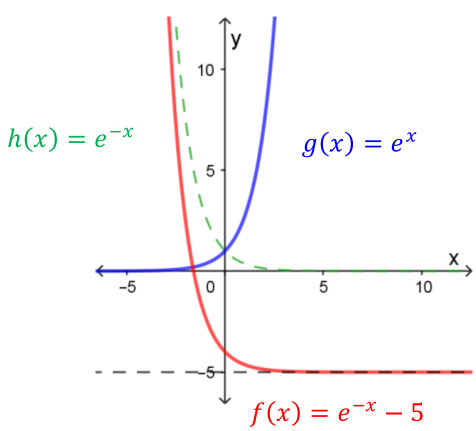
6) $f(x) = -\frac{1}{8}e^{-x} \rightarrow$ Reflexión con respecto al eje *y*, contracción o encogimiento vertical por un factor de un octavo, reflexión con respecto al eje *x*.



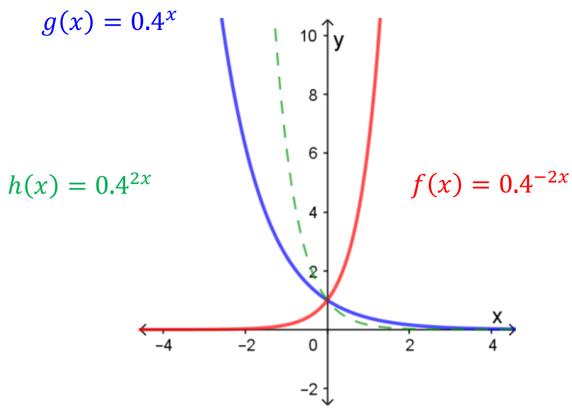
7) $f(x) = 2^{x-3} + 1 \rightarrow$ Desplazamiento horizontal tres unidades hacia la derecha, desplazamiento vertical una unidad hacia arriba.



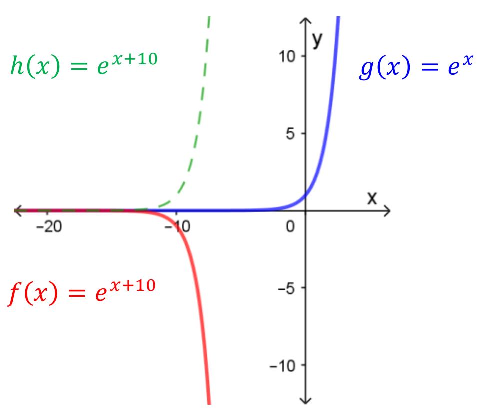
8) $f(x) = e^{-x} - 5 \rightarrow$ Reflexión con respecto al eje y, desplazamiento vertical cinco unidades hacia abajo.



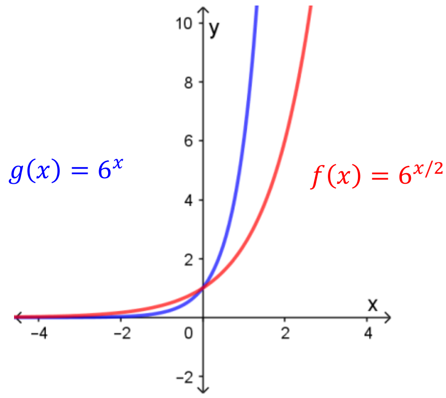
9) $f(x) = 0.4^{-2x} \rightarrow$ Contracción o encogimiento horizontal por un factor de dos, reflexión con respecto al eje *x*.



10) $f(x) = -e^{x+10} \rightarrow$ Desplazamiento horizontal diez unidades hacia la izquierda, reflexión con respecto al eje *x*.

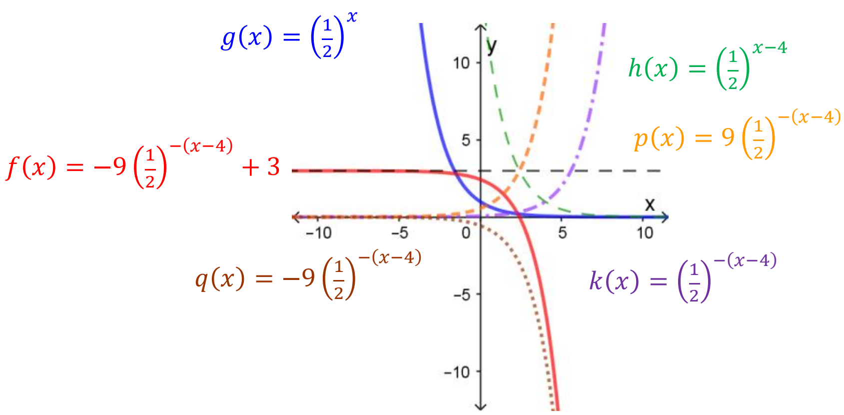


11) $f(x) = 6^{x/2} \rightarrow$ Expansión o alargamiento horizontal por un factor de un medio



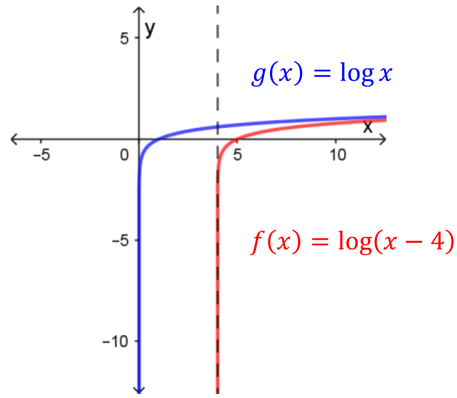
12) $f(x) = -9\left(\frac{1}{2}\right)^{-x+4} + 3 = -9\left(\frac{1}{2}\right)^{-(x-4)} + 3$

Desplazamiento horizontal cuatro unidades hacia la derecha, reflexión con respecto al eje *y*, expansión o alargamiento vertical por un factor de nueve, reflexión con respecto al eje *x*, desplazamiento vertical tres unidades hacia arriba.

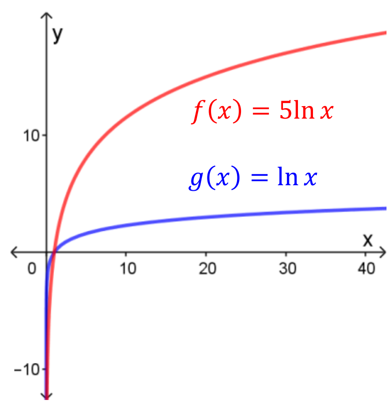


Ejercicio de práctica 22

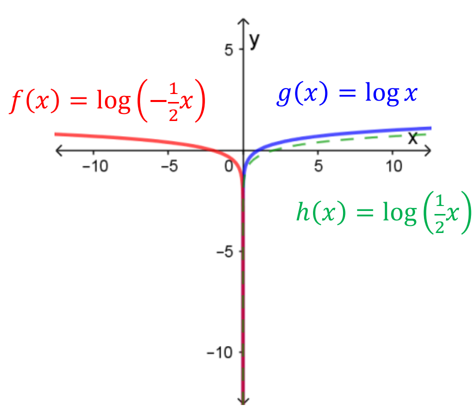
1) $f(x) = \log(x-4) \rightarrow$ Desplazamiento horizontal cuatreo unidades hacia la derecha.



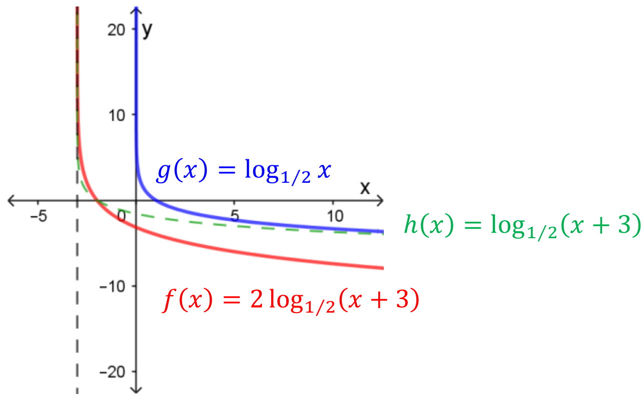
2) $f(x) = 5\ln x \rightarrow$ Expansión o alargamiento vertical por un factor de cinco.



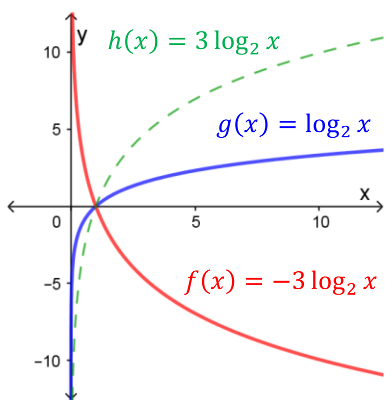
3) $f(x) = \log\left(-\frac{1}{2}x\right) \rightarrow$ Expansión o alargamiento horizontal por un factor de un medio, reflexión con respecto al eje y.



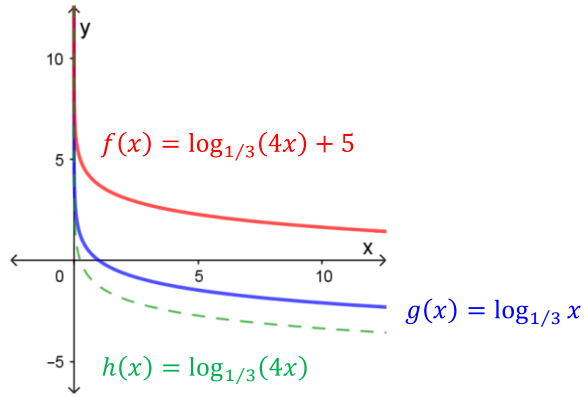
4) $f(x) = 2\log_{1/2}(x+3) \rightarrow$ Desplazamiento horizontal tres unidades hacia la izquierda, expansión o alargamiento vertical por un factor de 2.



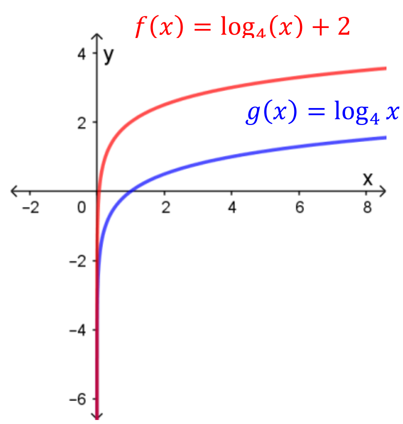
5) $f(x) = -3\log_2 x \rightarrow$ Expansión o alargamiento vertical por un factor de tres, reflexión con respecto al eje *x*.



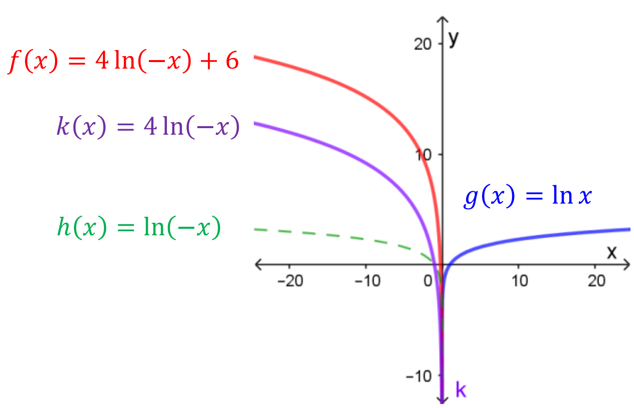
6) $f(x) = \log_{1/3}(4x) + 5 \rightarrow$ Contracción o encogimiento horizontal por un factor de 4, desplazamiento vertical cinco unidades hacia arriba.



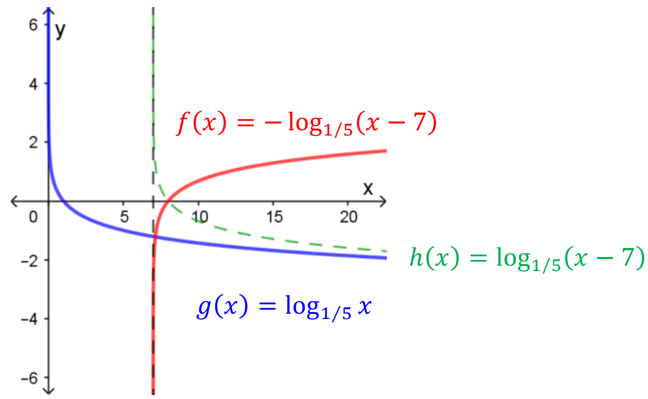
7) $f(x) = \log_4 x + 2 \rightarrow$ Desplazamiento vertical dos unidades hacia arriba.



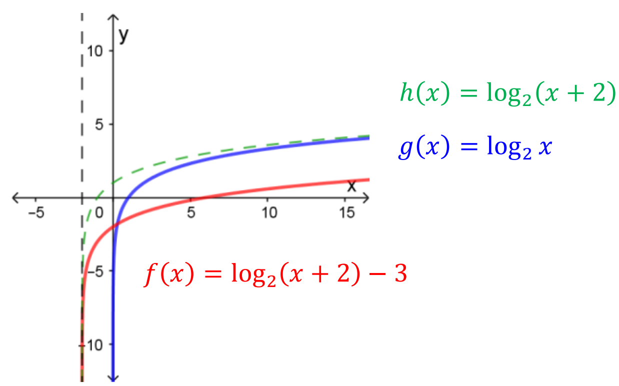
8) $f(x) = 4\ln(-x) + 6 \rightarrow$ Reflexión con respecto al eje y, expansión o alargamiento vertical por un factor de cuatro, desplazamiento vertical dos unidades hacia arriba.



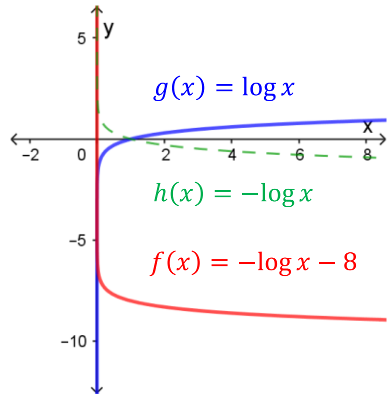
9) $f(x) = -\log_{1/5}(x-7) \rightarrow$ Desplazamiento horizontal tres unidades hacia la derecha, reflexión con respecto al eje *x*.



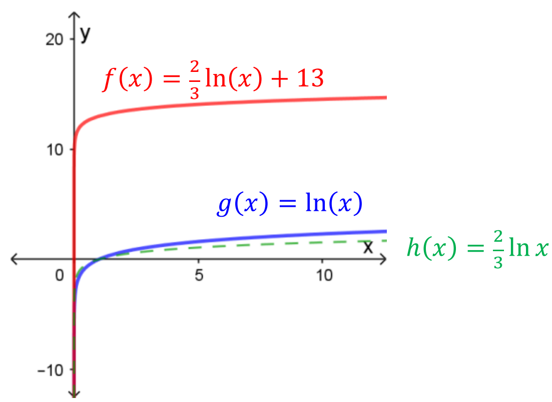
10) $f(x) = \log_2(x+2) - 3 \rightarrow$ Desplazamiento horizontal dos unidades hacia la izquierda, desplazamiento vertical tres unidades hacia abajo.



11) $f(x) = -\log x - 8 \rightarrow$ Reflexión con respecto al eje *x*, desplazamiento vertical ocho unidades hacia abajo.



12) $f(x) = \frac{2}{3}\ln x + 13 \rightarrow$ Contracción o encogimiento vertical por un factor de dos tercios, desplazamiento vertical trece unidades hacia arriba.



Ejercicios de práctica 23

1) En diciembre de 2020 adquiriste un automóvil en \$32,438. Si cada año su valor inicial disminuye 5.9%, ¿cuánto valdrá en diciembre de 2025?

Datos

$V_i = \$32{,}438$

$5.9\% = \frac{5.9}{100} = 0.059$

$t = 2{,}025 - 2{,}020 = 5\ años$

$V_f = V_i \cdot (1 - r)^t$

$V_f = \$32{,}438(1 - 0.059)^5$

$V_f = \$32{,}438(0.941)^5$

$V_f \approx \$32{,}438(0.7378)$

$$V_f \approx \$23{,}932.76$$

En diciembre de 2020 el automóvil valdrá aproximadamente $23,932.76.

2) Una población de bacterias comenzó con 500 en una colonia y se duplica cada seis horas. ¿Cuántas bacterias habrá después de un día?

Datos

$n_0 = 500$

$a = 6\ horas$

$t = 1\ día = 24\ horas$

$$n(t) = n_0 \cdot 2^{t/a}$$

$$n(24) = 500 \cdot 2^{24/6}$$

$$n(24) = 500 \cdot 2^4$$

$$n(24) = 50 \cdot 16$$

$$n(24) = 8{,}000$$

Después de ocho horas habrá 8,000 bacterias.

3) Si $15,000 son depositados en una cuenta que paga a un 5% de interés compuesto trimestralmente, ¿cuánto dinero tendrás en la cuenta en 2 años?

Datos

$P = \$15{,}000$

$r = 5\% = \frac{5}{100} = 0.05$

$t = 2\ años$

$n = 4\ trimestres$

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$A = \$15{,}000\left(1 + \frac{0.05}{4}\right)^{(4)(2)}$$

$$A = \$15{,}000(1 + 0.0125)^8$$

$$A = \$15{,}000(1.0125)^8$$

$$A \approx \$15{,}000(1.1045)$$

$$A \approx \$16{,}265.42$$

Luego de cinco años tendrás en la cuenta aproximadamente $16,567.50.

4) Si $15,000 son depositados en una cuenta de ahorros que paga a un 5% de interés compuesto continuo anualmente, ¿cuánto dinero tendrás en la cuenta en 2 años?

Datos

$P = \$15{,}000$

$r = 5\% = \frac{5}{100} = 0.05$

$t = 2\ años$

$A = Pe^{rt}$

$A = \$15{,}000e^{(0.05)(2)}$

$A = \$15{,}000e^{0.1}$

$A \approx \$15{,}000(1.1052)$

$A \approx \$16{,}578$

Luego de cinco años tendrás en la cuenta aproximadamente $16,578.

Ejercicio de práctica 24

1) $\log_2 45 = \log_2(5 \cdot 9) = \log_2 5 + \log_2 9 \approx 2.32 + 3.17 \approx 5.49$

2) $\log_2 \frac{5}{9} = \log_2 5 - \log_2 9 \approx 2.32 - 3.17 \approx -0.85$

3) $\log_2 25 = \log_2 5^2 = 2\log_2 5 \approx 2(2.32) \approx 4.64$

4) $\log_2 125 = \log_2 5^3 = 3\log_2 5 \approx 3(2.32) \approx 6.96$

5) $\log_2 \frac{1}{5} = \log_2 5^{-1} = -\log_2 5 \approx -2.32$

6) $\log_2 \frac{1}{9} = \log_2 9^{-1} = -\log_2 9 \approx -3.17$

Ejercicio de práctica 25

1) $\ln \frac{3x^5}{y} = \ln 3 + \ln x^5 - \ln y = \ln 3 + 5\ln x - \ln y$

2) $\log_7 5x^6 = \log_7 5 + \log_7 x^6 = \log_7 5 + 6\log_7 x$

3) $\ln \frac{9}{24x} = \ln \frac{9}{3(8)x} = \ln \frac{3}{8x} = \ln 3 - \ln 8x = \ln 3 - (\ln 8 + \ln x) = \ln 3 - \ln 8 - \ln x$

$= \ln 3 - \ln 2^3 - \ln x = \ln 3 - 3\ln 2 - \ln x$

4) $\log_5 7\sqrt{x} = \log_5 7 + \log_5 \sqrt{x} = \log_5 7 + \log_5 x^{1/2} = \log_5 7 + \frac{1}{2}\log_5 x$

5) $\log_6 \sqrt[4]{x^3 y} = \log_6 (x^3 y)^{1/4} = \frac{1}{4}\log_6 (x^3 y) = \frac{1}{4}(\log_6 x^3 + \log_6 y) = \frac{1}{4}(3\log_6 x + \log_6 y)$

$= \frac{3\log_6 x + \log_6 y}{4}$

6) $\log_5 \sqrt[3]{\left(\frac{x^4 y^5}{z}\right)^2} = \log_5 \left[\left(\frac{x^4 y^5}{z}\right)^2\right]^{1/3} = \log_5 \left(\frac{x^4 y^5}{z}\right)^{2/3} = \frac{2}{3}\log_5 \left(\frac{x^4 y^5}{z}\right)$

$= \frac{2}{3}[\log_5 (x^4 y^5) - \log_5 z] = \frac{2}{3}(\log_5 x^4 + \log_5 y^5 - \log_5 z)$

$= \frac{2}{3}(4\log_5 x + 5\log_5 y - \log_5 z) = \frac{2\left(4\log_5 x + 5\log_5 y - \log_5 z\right)}{3}$

Ejercicio de práctica 26

1) $\log 8 - 2\log 3 + \log 5 = \log 8 - \log 3^2 + \log 5 = \log 8 - \log 9 + \log 5$

$= \log 8\,(5) - \log 9 = \log 40 - \log 9 = \log\left(\frac{40}{9}\right)$

2) $\ln 9 + 3\ln 4 - \ln 24 = \ln 9 + \ln 4^3 - \ln 24 = \ln 9 + \ln 64 - \ln 24 = \ln 9\,(64) - \ln 24$

$= \ln 576 - \ln 24 = \ln\left(\frac{576}{24}\right) = \ln 24$

3) $\log x - \log 7 = \log\left(\frac{x}{7}\right)$

4) $\ln 4 + 2\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln x = \ln 4 + \ln\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ln x = \ln 4 + \ln\left(\frac{1}{4}\right) + \ln x = \ln 4\left(\frac{1}{4}\right) + \ln x$

$= \ln 1 + \ln x = 0 + \ln x = \ln x$

5) $\log\left(\frac{m}{n}\right) - 4\log m^3 + \log n^{-2} = \log\left(\frac{m}{n}\right) - \log(m^3)^4 + \log\frac{1}{n^2} = \log\left(\frac{m}{n}\right) - \log m^{12} + \log\frac{1}{n^2}$

$$= \log\left(\frac{\frac{m}{n}}{m^{12}}\right) + \log\frac{1}{n^2} = \log\left(\frac{m}{n}\cdot\frac{1}{m^{12}}\right) + \log\frac{1}{n^2}$$

$$= \log\left(\frac{1}{m^{11}n}\right) + \log\frac{1}{n^2} = \log\left(\frac{1}{m^{11}n}\right)\left(\frac{1}{n^2}\right) = \log\left(\frac{1}{m^{11}n^3}\right)$$

6) $2\log_3(m-n) = \log_3(m-n)^2$

Ejercicio de práctica 27

1) $\frac{\log 7}{\log 2} \approx \frac{0.8451}{0.3010} \approx 2.81$

2) $\frac{\log 28}{\log 7} \approx \frac{1.4472}{0.8451} \approx 1.71$

3) $\frac{\log 16}{\log 11} \approx \frac{1.2041}{1.0143} \approx 1.16$

4) $\frac{\log 8}{\log 23} \approx \frac{0.9031}{1.3617} \approx 0.66$

5) $\frac{\log 50}{\log 20} \approx \frac{1.6990}{1.3010} \approx 1.31$

6) $\frac{\log 19}{\log 6} \approx \frac{1.2788}{0.7782} \approx 1.64$

7) $\frac{\log 11}{\log 5} \approx \frac{1.0414}{0.6990} \approx 1.49$

8) $\frac{\log\left(\frac{2}{13}\right)}{\log 9} \approx \frac{-0.8129}{0.9542} \approx -0.85$

9) $\frac{\log\left(\frac{9}{40}\right)}{\log 3} \approx \frac{-0.6478}{0.4771} \approx -1.36$

10) $\frac{\log 3}{\log\left(\frac{1}{2}\right)} \approx \frac{0.4771}{-0.3010} \approx -1.58$

11) $\frac{\log 27}{\log 3} = 3$

12) $\frac{\log 4}{\log 64} = \frac{1}{3}$

Ejercicio de práctica 28

1) $\ln(6x-3) = \ln(x+7)$

$6x - 3 = x + 7$

2) $\log_2(5x-9) = 4$

$5x - 9 = 2^4$

$$6x - x = 7 + 3$$

$$\frac{5x}{5} = \frac{10}{5}$$

$$x = 2$$

$$5x - 9 = 16$$

$$5x = 16 + 9$$

$$\frac{5x}{5} = \frac{25}{5}$$

$$x = 5$$

3) $\log 2x + \log(x-5) = 2$

$$\log 2x(x-5) = 2$$

$$\log(2x^2 - 10x) = 2$$

$$2x^2 - 10x = 10^2$$

$$2x^2 - 10x = 100$$

$$2x^2 - 10x - 100 = 0$$

$$2(x^2 - 5x - 50) = 0$$

$$(x-10)(x+5) = 0$$

$x - 10 = 0$ ó $x + 5 = 0$

$\boxed{x = 10}$ $\quad x = -5$

4) $\ln(8x-3) = \ln(6x+15)$

$$8x - 3 = 6x + 15$$

$$8x - 6x = 15 + 3$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{18}{2}$$

$$x = 9$$

5) $\log_4(x-6) = 3$

$$x - 6 = 4^3$$

$$x - 6 = 64$$

$$x = 64 + 6$$

$$x = 70$$

6) $\log 10x + \log(x-3) = 2$

$$\log 10x(x-3) = 2$$

$$\log(10x^2 - 30x) = 2$$

$$10x^2 - 30x = 10^2$$

$$10x^2 - 30x = 100$$

$$10x^2 - 30x - 100 = 0$$

$$10(x^2 - 3x - 10) = 0$$

$$(x-5)(x+2) = 0$$

$x - 5 = 0$ ó $x + 2 = 0$

$\boxed{x = 5}$ $\quad x = -2$

7) $\log_3(x+24) + \log_3 x = 4$

$$\log_3 x(x+24) = 4$$

$$\log_3(x^2+24x) = 4$$

$$x^2 + 24x = 3^4$$

$$x^2 + 24x = 81$$

$$x^2 + 24x - 81 = 0$$

$$(x+27)(x-3) = 0$$

$x + 27 = 0$ ó $x - 3 = 0$

$x = -27$ $\boxed{x = 3}$

8) $\log_5(3x-4) = \log_5 8$

$$3x - 4 = 8$$

$$3x = 8 + 4$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{12}{3}$$

$$x = 4$$

9) $\ln(12x-9) = \ln 3x$

$$12x - 9 = 3x$$

$$12x - 3x = 9$$

$$\frac{9x}{9} = \frac{9}{9}$$

$$x = 1$$

10) $\log_3(x^2+2x-15) = 2$

$$x^2 + 2x - 15 = 3^2$$

$$x^2 + 2x - 15 = 9$$

$$x^2 + 2x - 15 - 9 = 0$$

$$x^2 + 2x - 24 = 0$$

$$(x+6)(x-4) = 0$$

$x + 6 = 0$ ó $x - 4 = 0$

$x = -6$ $x = 4$

11) $\ln x + \ln(x+3) = 4$

$$\ln x\,(x+3) = 4$$

$$\ln(x^2+3x) = 4$$

$$x^2 + 3x = e^4$$

$$x^2 + 3x - e^4 = 0$$

$$a = 1; b = 3; c = e^4$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2(1)}$$

12) $2\log x = \log 361$

$$\log x^2 = \log 361$$

$$x^2 = 361$$

$$x = 19$$

$x = \frac{-3 \pm \sqrt{(3)^2 - 4(1)(-e^4)}}{2}$

$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4e^4}}{2}$

$x = \frac{-3 + \sqrt{9 + 4e^4}}{2}$

$x \approx 6.04$

13) $\log_3 3x^2 + \log_3 3 = 2$

$\log_3 3(3x^2) = 2$

$\log_3 9x^2 = 2$

$9x^2 = 3^2$

$\frac{9x^2}{9} = \frac{9}{9}$

$x^2 = 1$

$x = \pm\sqrt{1}$

$x = \pm 1$

$x = -1 \qquad x = 1$

14) $\ln(x - 8) = \frac{3}{2} \ln 4$

$\ln(x - 8) = \ln 4^{3/2}$

$\ln(x - 8) = \ln\left(\sqrt{4}\right)^3$

$\ln(x - 8) = \ln 2^3$

$\ln(x - 8) = \ln 8$

$x - 8 = 8$

$x = 8 + 8$

$x = 16$

15) $\log_5 25^x = 8$

$5^8 = 25^x$

$5^8 = 5^{2x}$

$\frac{8}{8} = \frac{2x}{8}$

$x = 4$

16) $4 \log x + 3 \log x - 2 \log x = \log 1{,}024$

$\log x^4 + \log x^3 - \log x^2 = \log 1{,}024$

$\log x^4\,(x^3) - \log x^2 = \log 1{,}024$

$\log \frac{x^4(x^3)}{x^2} = \log 1{,}024$

$\log x^{4+3-2} = \log 1{,}024$

$\log x^5 = \log 1{,}024$

$x^5 = 1{,}024$

$x^5 = 4^5$

$x = 4$

17) $3^{\log_3 5x} = 10$

$\frac{5x}{5} = \frac{10}{5}$

$x = 2$

18) $\ln e^x = 7$

$x = 7$

19) $\log_7(2x-1) - 2\log_7 2 = \log_7(x+3) - 2\log_7 3$

$\log_7(2x-1) - \log_7 2^2 = \log_7(x+3) - \log_7 3^2$

$\log_7(2x-1) - \log_7 4 = \log_7(x+3) - \log_7 9$

$\log_7\left(\frac{2x-1}{4}\right) = \log_7\left(\frac{x+3}{9}\right)$

$\frac{2x-1}{4} = \frac{x+3}{9}$

$9(2x-1) = 4(x+3)$

$18x - 9 = 4x + 12$

$18x - 4x = 12 + 9$

$\frac{14x}{14} = \frac{21}{14}$

$x = \frac{3}{2}$

20) $e^{\ln x} = 4$

$x = 4$

21) $2^x = 9$

$\ln 2^x = \ln 9$

$x\ln 2 = \ln 3^2$

$x\ln 2 = 2\ln 3$

$x = \frac{2\ln 3}{\ln 2}$

$x \approx 3.17$

22) $3^x = 5$

$\ln 3^x = \ln 5$

$x\ln 3 = \ln 5$

$x = \frac{\ln 5}{\ln 3}$

$x \approx 1.46$

23) $8^{10x} = 19$

$\ln 8^{10x} = \ln 19$

24) $5e^{-0.2x} - 3 = 21$

$5e^{-0.2x} = 21 + 3$

$10x\ln 8 = \ln 19$

$x = \frac{\ln 19}{10\ln 8}$

$x \approx 0.14$

$\frac{5e^{-0.2x}}{5} = \frac{24}{5}$

$e^{-0.2x} = \frac{24}{5}$

$\ln(e^{-0.2x}) = \ln\left(\frac{24}{5}\right)$

$-0.2x = \ln\left(\frac{24}{5}\right)$

$-\frac{2}{10}x = \ln\left(\frac{24}{5}\right)$

$-\frac{1}{5}x = \ln\left(\frac{24}{5}\right)$

$x = -5\ln\left(\frac{24}{5}\right)$

$x \approx -7.84$

25) $6^{5x} = 12$

$\ln 6^{5x} = \ln 12$

$5x\ln 6 = \ln 12$

$x = \frac{\ln 12}{5\ln 6}$

$x \approx 0.28$

26) $13^{7x} = 32$

$\ln 13^{7x} = \ln 32$

$7x\ln 13 = \ln 32$

$x = \frac{\ln 32}{7\ln 13}$

$x \approx 0.19$

27) $2e^{9x} + 11 = 18$

$2e^{9x} = 18 - 11$

$\frac{2e^{9x}}{2} = \frac{7}{2}$

$e^{9x} = \frac{7}{2}$

$\ln(e^{9x}) = \ln\left(\frac{7}{2}\right)$

$9x = \ln\left(\frac{7}{2}\right)$

$x = \frac{\ln\left(\frac{7}{2}\right)}{9}$

$x = \frac{\ln 7}{9\ln 2}$

$x \approx 0.31$

28) $3e^{4x} - 13 = 17$

$3e^{4x} = 17 + 13$

$\frac{3e^{4x}}{3} = \frac{30}{3}$

$e^{4x} = 10$

$\ln(e^{4x}) = \ln 10$

$4x = \ln 10$

$x = \frac{\ln 10}{4}$

$x \approx 0.58$

Ejercicio de práctica 29

1) $4^x < 18$

$\log_4 4^x < \log_4 18$

$x < \log_4 18$

$x < \frac{\log 18}{\log 4}$

$x < 2.08 \ldots$

$\left(-\infty, \frac{\ln 18}{\ln 4}\right)$

2) $e^x > 6$

$\ln e^x > \ln 6$

$x > \ln 6$

$x > 1.79 \ldots$

$(\ln 6\,, \infty)$

3) $10^{x+1} < 2$

$\log 10^{x+1} < \log 2$

$x + 1 < \log 2$

$x < \log(2) - 1$

$x < -0.69 \ldots$

$(-\infty, \log(2) - 1)$

4) $10^{3x-12} > 2$

$\log 10^{3x-12} > \log 2$

$3x - 12 > \log 2$

$\frac{3x}{3} > \frac{\log(2)+12}{3}$

$x > \frac{\log(2)+12}{3}$

$x > 4.10 \ldots$

$\left(\frac{\log(2)+12}{3}, \infty\right)$

5) $\log x + 7 < 35$

$\log x < 35 - 7$

$\log x < 28$

$0 < x < 10^{28}$

$(0, 10^{28})$

6) $2 \ln x - 1 > 6$

$2 \ln x > 6 + 1$

$\frac{2 \ln x}{2} > \frac{7}{2}$

$\ln x > \frac{7}{2}$

$x > e^{7/2}$

$x > 33.11 \ldots$

$\left(e^{7/2}, \infty\right)$

7) $8^x > 48$

$\log_8 8^x > \log_8 48$

$x > \log_8 18$

$x > \frac{\log 48}{\log 8}$

$x > 1.86 \ldots$

$\left(\frac{\ln 48}{\ln 8}, \infty\right)$

8) $9^x \leq 36$

$\log_9 9^x \leq \log_9 36$

$x \leq \log_9 36$

$x \leq \frac{\log 36}{\log 9}$

$x \leq 1.63 \ldots$

$\left(-\infty, \frac{\ln 36}{\ln 9}\right]$

9) $\ln x \geq 4$

$x \geq e^4$

$[e^4, \infty)$

10) $\log_3 x < 3$

$x < 3^3$

$0 < x < 27$

$(0, 27)$

11) $5^{3x-4} < 11$

$\log 5^{3x-4} < \log 11$

$(3x-4)\log 5 < \log 11$

$3x - 4 < \frac{\log 11}{\log 5}$

$\frac{3x}{3} < \frac{\log 11}{\log 5} + 4$

$x < \frac{4}{3} + \frac{\log 11}{3 \log 5}$

$x < 1.82$

$\left(-\infty, \frac{4}{3} + \frac{\log 11}{3 \log 5}\right)$

12) $e^{4x+3} > 15$

$\ln e^{4x+3} > \ln 15$

$4x + 3 > \ln 15$

$\frac{4x}{4} > \frac{\ln(15)-3}{4}$

$x > \frac{\ln(15)-3}{4}$

$x > -0.07 \ldots$

$\left(\frac{\ln(15)-3}{4} \infty\right)$

13) $-2\log_7 x + 4 \leq 6$

$-2\log_7 x \leq 6 - 4$

14) $-4\log_3 x - 3 \geq 5$

$-4\log_3 x \geq 5 + 3$

$$-2\log_7 x \leq 2$$

$$\frac{-2\log_7 x}{-2} \geq \frac{2}{-2}$$

$$\log_7 x \geq -1$$

$$x \geq 7^{-1}$$

$$x \geq \frac{1}{7}$$

$$\left[\frac{1}{7}, \infty\right)$$

$$-4\log_3 x \geq 8$$

$$\frac{-4\log_3 x}{-4} \leq \frac{8}{-4}$$

$$\log_3 x \leq -2$$

$$x \leq 3^{-2}$$

$$x \leq \frac{1}{3^2}$$

$$0 < x \leq \frac{1}{9}$$

$$\left(0, \frac{1}{9}\right]$$

15) $-6\log_4 x \geq -12$

$$\frac{-6\log_4 x}{-6} \leq \frac{-12}{-6}$$

$$\log_4 x \leq 2$$

$$x \leq 4^2$$

$$0 < x \leq 16$$

$$(0,16]$$

Ejercicio de práctica 30

1) El servicio de control de calidad de una empresa que fabrica lavadoras ha comprobado que el porcentaje de lavadoras que sigue funcionando al cabo de ***t*** años viene dada por la función:

$$f(x) = \left(\frac{8}{9}\right)^t$$

¿Cuánto tiempo deberá transcurrir para que funcione el 40% de las lavadoras de la fábrica?

Dato

$40\% = \frac{40}{100} = 0.4$

$$0.4 = \left(\frac{8}{9}\right)^t$$

$$\log 0.4 = \log\left(\frac{8}{9}\right)^t$$

$$\log 0.4 = t\log\left(\frac{8}{9}\right)$$

$$t = \frac{\log(0.4)}{\log\left(\frac{8}{9}\right)}$$

$$t \approx \frac{-0.3979}{-0.0512}$$

$$t \approx 7.77\ años$$

$$t \approx 7años\ 285\ días$$

Deberá transcurrir aproximadamente 7 años 285 días para que funcione el 40% de las lavadoras.

Recuperado el 1 de octubre de 2020 de www.ejerciciosweb.com

2) Supongamos que se invierten $3,000.00 al 15% de interés compuesto continuo, ¿cuánto tiempo se necesitaría para que se duplique esta inversión?

- La fórmula de interés compuesto continuo es $A = Pe^{rt}$, donde A representa el valor de la inversión a un tiempo t; P representa el principal invertido; r representa la razón de interés a la que se invierte y t representa el tiempo total que dura la inversión.

Datos

$A = \$6,000$

$P = \$3,000$

$r = 15\% = \frac{15}{100} = 0.15$

$$6000 = 3000e^{(0.15)t}$$

$$\frac{6000}{3000} = e^{(0.15)t}$$

$$2 = e^{(0.15)t}$$

$$\ln 2 = \ln e^{(0.15)t}$$

$$\ln 2 = (0.15)t$$

$$\frac{\ln 2}{0.15} = t$$

$$\frac{0.6931}{0.15} \approx t$$

$$t \approx 4.62$$

Se necesita aproximadamente 5 años para que se duplique la inversión.

3) En la escala de Ritcher, la magnitud R de un terremoto de intensidad I está dado por la fórmula:

$$R = \log \frac{I}{I_0}$$

donde $I_0 = 1$es la intesidad mínima usada para comparar. ¿Cuál es la intesidad del terremoto ocurrido en Puerto Rico el 7 de enero de 2020 si su magnitud fue de 6.0 en la escala de Ritcher?

Datos

$R = 6.0$

$I_0 = 1$

$$R = \log \frac{I}{I_0}$$
$$6.0 = \log \frac{I}{1}$$
$$6.0 = \log I$$
$$10^{6.0} = 10^{\log I}$$
$$I = 10^{6.0}$$
$$I \approx 1{,}000{,}000$$

La intensidad del terremoto fue aproximadamente 1,000,000.

4) El nivel de intensidad del sonido, en decibeles (dB), está dado por:

$$B = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

donde I es la intensidad del sonido medida en watts por metro cuadrado W/m^2 y la intensidad más baja que se puede escuchar es $I_0 = 10^{-12}\, W/m^2$. ¿Cuán fuerte es el sonido de los aparatos personales de música si su intensidad es de aproximadamente $10^{-2}\, W/m^2$?

Dato

$I_0 = 10^{-2}$

$$B = 10 \log \frac{I}{I_0}$$
$$B = 10 \log \frac{10^{-2}}{10^{-12}}$$
$$B = 10 \log 10^{-2-(-12)}$$
$$B = 10 \log 10^{-2+12}$$
$$B = 10 \log 10^{10}$$
$$B = 10(10)$$
$$B = 100$$

El nivel de intensidad del sonido del tráfico de una ciudad es 100 dB.

Tareas de Desempeño

Las siguientes tareas de desempeño son parte de la unidad 5 del curso de Álgebra II. Estas se ajustan muy bien al contenido presentado en este módulo. El estudiante debe comunicarse con su maestro para que le indique cuáles tareas serán parte de su evaluación. Cada maestro proveerá la rúbrica de las evaluaciones.

Informe de negocios de Phones R-Us

- Los estudiantes demostrarán su comprensión de las funciones exponenciales al desarrollar y analizar un informe de negocios.

Tarea:

- Como director de mercadeo de Phones-R-US, el director ejecutivo te ha pedido que determines si lo que se rumora sobre el "auge de celulares" es realmente cierto. En particular, en una noticia de prensa reciente se sugería que desde el año 2010, uno de cada tres estadounidenses tiene por lo menos un teléfono celular. Si ese es el caso, la compañía planea expandir sus operaciones, esta inversión podría colocarla en una situación financiera difícil durante diez años.
- Para preparar tu informe, has encontrado información real sobre la tasa de propietarios de celulares, como se representa en la tabla a continuación. Prepara tu informe usando esta información y haz recomendaciones en cuanto a la posible expansión. Tu informe debe incluir una discusión de cuán realistas son las predicciones de los modelos.

Año Número aproximado de celulares	**Suscriptores**
1985	470,000
1986	717,000
1990	3,800,000
1995	32,000,000
1996	48,500,000

Utiliza la rúbrica para evaluar el trabajo de los estudiantes (ver anejo: “AL.5 Tarea de desempeño - Rúbrica Phones-R-Us”).

(Fuente: www.curriculumframer.com)

¿Cuánto tiempo se toma?

- Los estudiantes demostrarán su comprensión de las funciones exponenciales y la inversa para hacer un modelo de un fenómeno médico natural. El personal médico, en particular los farmacéuticos que trabajan con la farmacocinética, deberá utilizar funciones exponenciales para ayudarse a determinar y controlar los regímenes de dosificación de las drogas potencialmente tóxicas para pacientes gravemente enfermos. La idea es aumentar el nivel del fármaco en el torrente sanguíneo lo suficiente para que sea eficaz, pero no tanto como para que sea tóxico.
- Instrucciones: Imagina que para un paciente con un régimen de dosificación particular, un fármaco alcance su máximo nivel de 300 miligramos. El fármaco es entonces eliminado del torrente sanguíneo a una tasa de 20 % por hora.

  a. ¿Cuánto del fármaco queda dos horas después de alcanzar el nivel máximo? ¿Cinco horas después del nivel máximo? Haz una tabla donde muestres cómo obtuviste tus respuestas.

  b. Tras dos horas, la cantidad del fármaco que queda en el torrente sanguíneo del paciente puede representarse con la expresión 300(1 – 0.2)(1 – 0.2). Explica por qué.

  c. Representa cada valor en la tabla anterior usando una expresión similar a la que se encuentra en la parte *b*.

  d. Escribe una función que permita obtener el nivel del fármaco en el torrente sanguíneo de la paciente *t* horas después del nivel máximo.

  e. Utiliza la función que escribiste en la parte *d* para computar los valores de la tabla en la parte a. ¿Obtuviste los mismos resultados?

  f. ¿Después de cuántas horas habrá menos de 10 mg del fármaco en el torrente sanguíneo? Explica cómo determinarías la respuesta usando tanto la función de gráfica como la tabla en tu calculadora gráfica.

  g. Escribe una ecuación que puedas resolver para determinar cuándo la concentración del fármaco alcanzará los 10 mg exactamente. Utiliza tu calculadora gráfica para ayudarte a resolver la ecuación. Explica el método que usaste para resolver el problema.

Funciones exponenciales

- Los estudiantes demostrarán su comprensión de las funciones exponenciales al completar las siguientes tareas:
- Halla datos reales que parezcan seguir un modelo exponencial. (Incluye los datos y cita tus fuentes).
- Crea una gráfica de tus datos en una hoja de papel cuadriculado grande (a mano) que pueda verse desde la parte atrás del salón. Describe cómo elegiste tu escala. Rotula los ejes claramente y ponle título a tu gráfica.
- Halla la ecuación del modelo exponencial. (Puede ser que tengas que trazar una línea de mejor ajuste.) Muestra tu trabajo de forma clara y en su totalidad.
- Describe lo que significa la base de tu modelo en términos del “mundo real".
- Describe lo que significa la intercepción en tu modelo en términos del “mundo real."
- Describe los límites de tu modelo.
- Si tus datos no están actualizados para el día de hoy, utiliza tu modelo para predecir el valor al día de hoy y compara tu predicción con el valor real.
- Haz tres preguntas bien formuladas que puedan contestarse con tu gráfica. Incluye una pregunta que prediga el futuro y que pueda responderse con tu gráfica. (No tienes que responder a tus preguntas en tu afiche, pero debes poder responderlas si se te pregunta.)

Identificar Funciones

Los estudiantes demostrarán su entendimiento de las familias de funciones a través de esta tarea de desempeño.

1. Prepare conjuntos de 15 cartas con lo siguiente:

   a. 4 ecuaciones de diferentes familias de funciones; (El Maestro selecciona cuales familias de funciones usar. Esto se puede aumentar si el maestro desea incluir más familias.)

   b. Gráficas que hagan par con las ecuaciones identificadas con la letra (A-D)

   c. Tabla de valores para cada gráfica; y

   d. La regla que haga par con la gráfica.

2. Entregue a cada estudiante un conjunto de cartas para que complete la tarea y lea las instrucciones de abajo

Instrucciones:

- Paree las gráficas, ecuaciones, tablas y reglas.
- Registre la respuesta en la tabla:

Gráfica	Ecuación	Tabla	Regla
A			
B			
C			
D			

Describa como pareó cada gráfica con su ecuación.

¿Quién está fechando el Carbono-14?

- Diga a la clase: Carbon-14 es una forma de carbón común que decae exponencialmente con el tiempo Los científicos usan Carbono-14 para poner fecha a la edad de cosas vivientes después que han muerto. Esto se debe a que el Carbono-14 tiene una vida-media tan larga. La vida-media del Carbono-14 (ej., la cantidad de tiempo que le toma por la mitad de cualquier cantidad de Carbono-14 para decaer) es aproximadamente 5730 años.
- Supongamos que tenemos un fósil de un vegetal y que la planta en el momento de su muerte contenía 10 microgramos de carbono-14 (un microgramo es igual a una millonésima parte de un gramo).

A) Utilizando esta información, crea una tabla para calcular la cantidad de carbono-14 que se mantiene en la planta fosilizada después de 5730 años × n para $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

B) ¿Qué se puede concluir de la parte A de cuando hay un microgramo de carbono-14 que queda en el fósil?

C) ¿Cuánto carbono permanece en la planta fosilizada después de 2865 = año? Explica cómo lo sabes.

Algebra CSI

- Los estudiantes demostrarán su comprensión de las funciones logarítmicas al determinar la hora de muerte de la víctima de un crimen.
- Tarea: ¿Cómo la detective M. Díaz obtuvo la hora de muerte de la víctima?
- La detective M. Díaz es llamada a la escena de un crimen donde se acaba de encontrar un cadáver. Llega a la escena a las 10:23 de la noche y comienza su investigación. Inmediatamente le toma la temperatura corporal al cadáver y determina que es de 80˚ Fahrenheit. M. Díaz verifica el termostato programable y determina que el cuarto ha estado a una temperatura constante de 68˚ F durante los últimos tres días. Una vez se recopilan las pruebas de la escena del crimen, exactamente una hora después de tomar la temperatura por primera vez, se le vuelve a tomar la temperatura corporal al cadáver y se determina que es de 78.5˚ F. Al siguiente día un investigador le pregunta a la detective: "¿A qué hora falleció nuestra víctima?" Asumiendo que la temperatura corporal de esta era normal (98.6˚ F) antes de morir, ¿cómo responde M. Díaz a la pregunta?

La Pregunta de los $64,000

- Asigne la siguiente tarea a la clase: En los 1950's, existía un juego muy popular llamado "La Pregunta de los $64,000," en donde los concursantes responden preguntas de trivia por la oportunidad de ganar dinero como premio. Desde entonces, muchos más programas de TV de preguntas han aparecido basados en la misma premisa.
- Tu tarea es crear un juego para la clase que cubra el material que se ha aprendido sobre las funciones inversas y logaritmos. Puede modelar su juego con base en juego que ya exista tal como "La Pregunta de los $64,000", "Búsqueda Trivial", o "¿Quién quiere ser Millonario?" o puede crear el suyo propio. El juego debe cumplir con el siguiente criterio:
- Para ganar el juego los participantes deben haber mostrado conocimiento de funciones inversas y logaritmos.
- El juego debe ser un juego justo ya que todos deben tener las mismas oportunidades de ganar.
- Las reglas deben estar claramente escritas con todas las contingencias cubiertas (ej., ¿Qué pasa si hay un empate? ¿Quién juega primero? etc.).

REFERENCIAS

Amar Educational Services, Inc. Módulo Instruccional.

Larson, R., & Boswell, L. (2015). *Álgebra 2: Big Ideas* (1st ed., pp. 3-365). Pensylvannia: Big Ideas Learning.

Ediciones Santillana, Inc. (2012). *Álgebra.* 1st ed, pp. 24-408). México, Editorial Impresora Apolo.

Pacheco Pérez, M. (2015). *Propuesta didáctica: Libro de Precálculo para Escuela Superior. Teoría y Práctica*

Larson, R., & Boswell, L. (2015). *Álgebra 2: Big Ideas* (1st ed., pp. 292-355). Pensylvannia: Big Ideas Learning.

Larson, R. (2011). *Trigonometría* (8th ed., pp. 375-436). Pensylvannia: Cengage Learning.

Stewart, J., Redlin, L. & Watson, S. (2012*). Precálculo: Matemáticas para el Cálculo.* (6ta ed., pp. 301-368). Cengage Learning.

Young, C.Y. (2018). Precalculus. (3ra ed., pp. 274-343). Wiley.

Recursos de internet:

https://www.montereyinstitute.org/courses/DevelopmentalMath/TEXTGROUP-9-14_RESOURCE/U09_L1_T3_text_final_es.html

http://miseguimientodeplanocartesiano.blogspot.com/2018/11/aplicaciones-en-la-vida-cotidiana.html

https://www.youtube.com/watch?v=BNo_QKFvDx0

https://www.ecuacionesresueltas.com/sistemas/nivel-1/sistemas-ecuaciones-metodo-sustitucion-explicado-ejemplos-problemas.html

https://www.montereyinstitute.org/courses/DevelopmentalMath/TEXTGROUP-9-14_RESOURCE/U09_L1_T3_text_final_es.html

http://miseguimientodeplanocartesiano.blogspot.com/2018/11/aplicaciones-en-la-vida-cotidiana.html

https://www.youtube.com/watch?v=BNo_QKFvDx0

https://www.ecuacionesresueltas.com/sistemas/nivel-1/sistemas-ecuaciones-metodo-sustitucion-explicado-ejemplos-problemas.html

https://www.ecuacionesresueltas.com/sistemas/nivel-2/sistemas-ecuaciones-metodo-igualacion-explicado-ejemplos-problemas-resueltos.html

https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/algebralineal/sistemas/metodo-de-reduccion.html

https://www.ecuacionesresueltas.com/sistemas/nivel-3/sistemas-ecuaciones-metodo-reduccion-explicado-ejemplos.html

https://www.freepik.com/

https://www.ecuacionesresueltas.com/sistemas/nivel-2/sistemas-ecuaciones-metodo-igualacion-explicado-ejemplos-problemas-resueltos.html

https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/algebralineal/sistemas/metodo-de-reduccion.html

https://www.ecuacionesresueltas.com/sistemas/nivel-3/sistemas-ecuaciones-metodo-reduccion-explicado-ejemplos.html

https://www.freepik.com/

https://static.pupr.edu/cpu-old/pdf/Matematicas/Math110/ecuacionescon%20valor%20absoluto.pdf

http://docs.uprb.edu/deptmate/material%20suplementario/CIME/10mo%20a%2012mo/T7%3B%20Funciones%20%20Exponenciales%20y%20Logar%EDtmicas%2810mo%20a%2012mo%29.pdf

https://www.ejerciciosweb.com

https://www.freepik.com

https://www.imagui.com/a/hoja-cuadriculada-png-czEa6x7do

https://personajeshistoricos.com/c-cientificos/leonhard-euler/

https://sites.google.com/site/napierg3b18/