

Imagen recuperada de <https://tinyurl.com/y8dykn5q>

LECCIONES DIDÁCTICAS DE MATEMÁTICAS

Trigonometría
11mo grado

octubre 2020



DE DEPARTAMENTO DE
EDUCACIÓN
GOBIERNO DE PUERTO RICO

Página web: <https://de.pr.gov/> Twitter: @educacionpr

Colaboradores

Prof^a. Isamalia Muñiz Nieves

Dra. Wanda I. Rivera Rivas

Contenido

Calendario de Lecciones

Unidad III: Funciones trigonométricas y sus gráficas

Lección 1 Gráficas de las funciones trigonométricas.

Lección 2 Amplitud y Periodo de las funciones seno y coseno.

Lección 3 Forma $f(t) = \pm A \sin (Bx + C) + D$.

Lección 4 Simetría y Paridad de las funciones sen y cos

Unidad IV: Identidades trigonométricas

Lección 1 Identidades Pitagóricas

Lección 2 Fórmulas de adición y diferencia para sen, cos y tan

Lección 3 Fórmulas de Ángulo Doble y Ángulo Medio

Referencias

Calendario de Lecciones Sugerido

SEMANAS	LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES
Unidad III: Funciones trigonométricas y sus gráficas					
11	Repasar Lecciones Unidad II	Repasar Lecciones Unidad II	Lección 1	Lección 1	Lección 1
12	Lección 1	Lección 2	Lección 2	Lección 2	Lección 3
13	Lección 3	Lección 3	Lección 3	Lección 3	Lección 3
14	Lección 3	Lección 3	Lección 4	Lección 4	Lección 4
15	Lección 4	Lección 4	Lección 4	Repaso de la Unidad	Examen de la Unidad
Unidad IV. Identidades trigonométricas					
16	Lección 5	Lección 5	Lección 5	Lección 5	Lección 5
17	Lección 5	Lección 6	Lección 6	Lección 6	Lección 6
18	Lección 6	Lección 6	Lección 6	Lección 6	Lección 6
19	Lección 7	Lección 7	Lección 7	Lección 7	Lección 7
20	Lección 7	Lección 7	Lección 7	Repaso de la Unidad	Examen de la Unidad



Imagen recuperada de https://cdn.pixabay.com/photo/2017/10/30/18/21/waves-2903097_1280.jpg

Unidad III: Funciones trigonométricas y sus gráficas

Unidad III:	Funciones trigonométricas y sus gráficas
Lección 1 Lección 2 Lección 3 Lección 4	Gráficas de las funciones trigonométricas. Amplitud y Período de las funciones seno y coseno. Forma: $f(t) = \pm A \sin(Bx + C) + D$. Simetría y Paridad de las funciones sen y cos
Objetivos de aprendizaje:	Al finalizar las lecciones podremos: <ul style="list-style-type: none"> ✓ Trazar la gráfica de funciones de la forma: $f(t) = \pm A \sin(Bx + C) + D$. ✓ Identificar las características de un fenómeno periódico usando la información provista por la gráfica. ✓ Utilizar funciones trigonométricas para construir modelos y resolver problemas matemáticos y del mundo real. ✓ Comparar funciones trigonométricas entre pares e impares.
Expectativas e Indicadores:	<p>ES.G.31.1 Compara transformaciones que conservan distancia y ángulo con aquellas que no los conservan (ejemplo. traslación versus estiramiento horizontal)</p> <p>ES.F.24.3 Grafica funciones expresadas simbólicamente y muestra las características claves de la gráfica. Grafica funciones trigonométricas y muestra período, línea media (eje primo), amplitud y desfase.</p> <p>ES.F.24.4 Representa las funciones trigonométricas por medio de tablas, gráficas, expresiones verbales y ecuaciones. Evalúa funciones trigonométricas para un número real dado. Reconoce las características principales de cada una de las funciones trigonométricas (el dominio, el recorrido, las intersecciones con los ejes, los valores máximos y mínimos, las asíntotas y los intervalos donde es creciente o decreciente).</p> <p>ES.F.28.4 Utiliza el círculo unitario para explicar la simetría (impar y par) y la periodicidad de las funciones trigonométrica.</p> <p>ES.F.29.1 Utiliza funciones trigonométricas para construir modelos y resolver problemas matemáticos y de la vida diaria</p> <p>ES.F.29.2 Escoge funciones trigonométricas para modelar fenómenos periódicos con amplitud, frecuencia y línea media dadas.</p>

Conceptos de la unidad:

Funciones Periódicas
Rango
Dominio
Puntos de intersección
Traslación

Creciente
Decreciente
Periodo
Transformaciones
Simetría

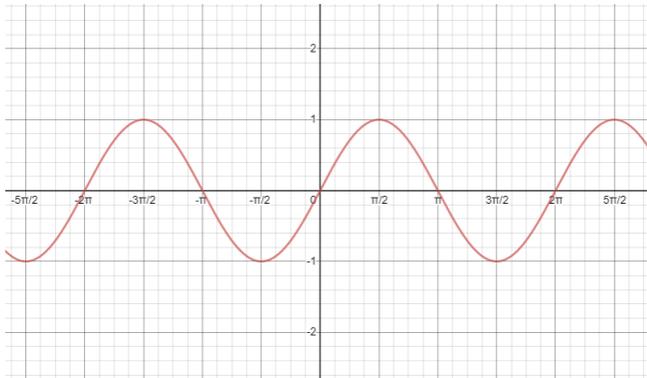
Valor máximo
Valor mínimo
Amplitud
Reflexión
Asíntotas

Exploración de conceptos (Actividad Sugerida) 15 puntos

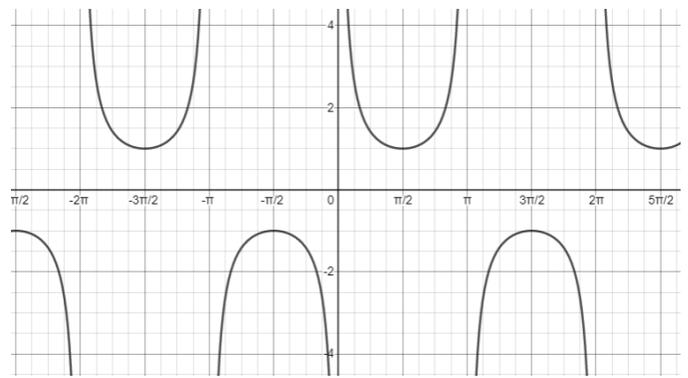
Construye tu glosario. Define los conceptos en tus propias palabras. Puedes buscar las definiciones a través de las lecciones, usar diagramas o representaciones, usar el internet o un libro de texto para explicar los conceptos.

Lección 1: Gráficas de las funciones trigonométricas

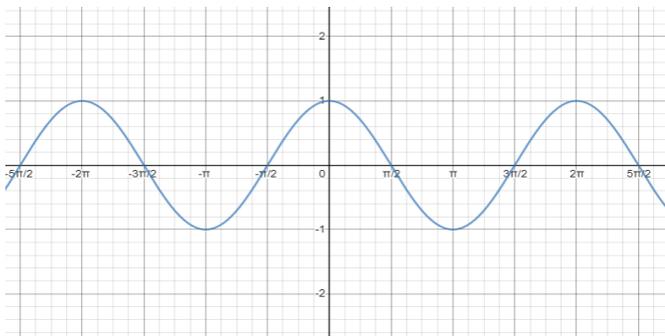
Recordemos las seis funciones trigonométricas: **Sen x** **Cos x** **Tan x** **Csc x** **Sec x** **Cot x**
Cada función tiene una gráfica que representa su comportamiento y demuestra las transformaciones que pueden ocurrir.



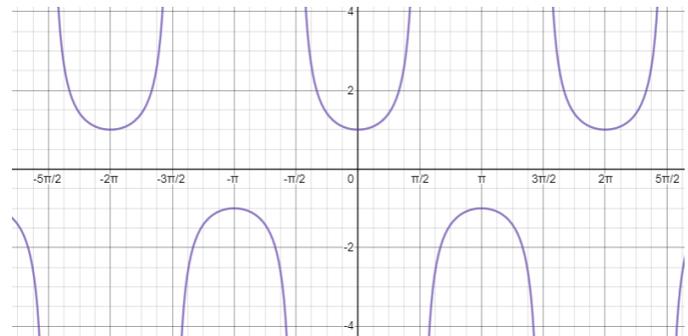
Gráfica de seno (sen)
 $y = \sin x$



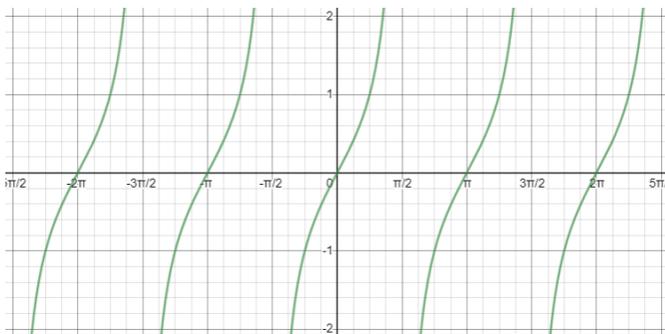
Gráfica de cosecante (csc)
 $y = \csc x$



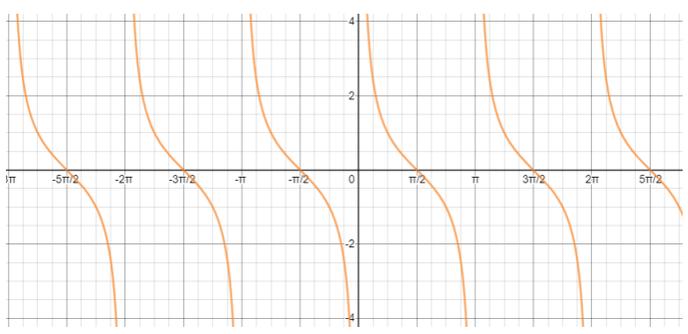
Gráfica de coseno (cos)
 $y = \cos x$



Gráfica de secante (sec)
 $y = \sec x$



Gráfica de tangente (tan)
 $y = \tan x$



Gráfica de cotangente (cot)
 $y = \cot x$

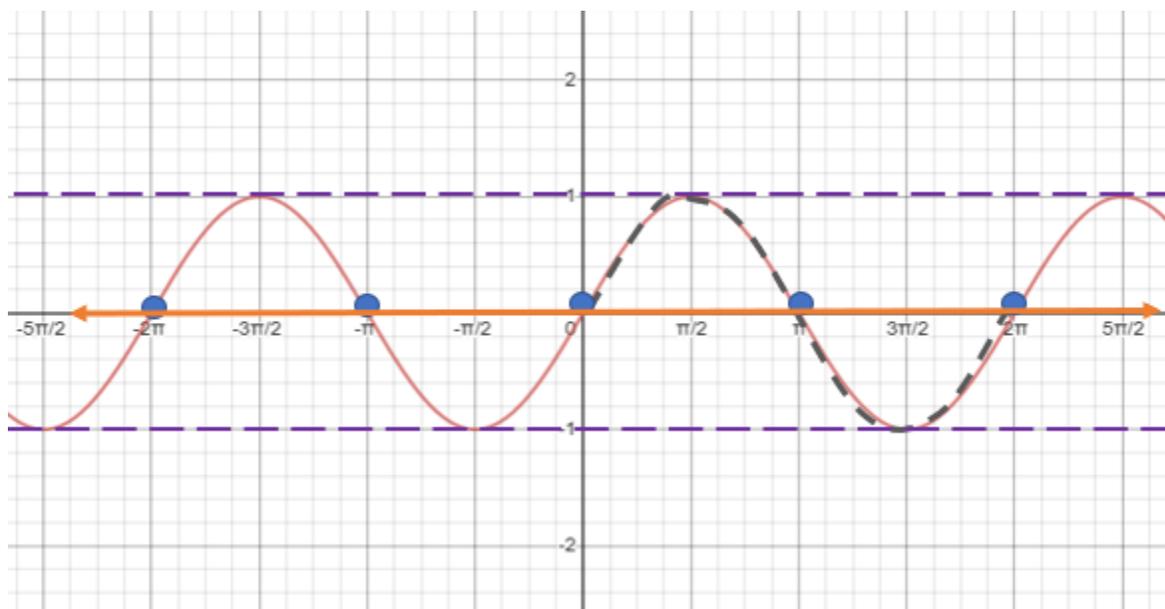
Las seis funciones trigonométricas son **funciones periódicas**. Se comportan de manera cíclica. Cada función tiene una gráfica con unas características que nos ayudan a identificarlas.



<https://youtu.be/Q2nutzqgbOk> (KhanAcademyEspañol, 2016)

Vamos a conocer las gráficas de las funciones de seno y coseno.

Gráfica de la función de seno de x



Función: $f(x) = \text{sen } x$
Ecuación: $y = \text{sen } x$

↔ **Dominio**- {conjunto de todos los números reales}

--- **Rango** $[-1, 1]$

~ **Período** 2π

● **Puntos de intersección** : ... $(-2\pi, 0)$ $(\pi, 0)$ $(0, 0)$ $(\pi, 0)$ $(2\pi, 0)$...

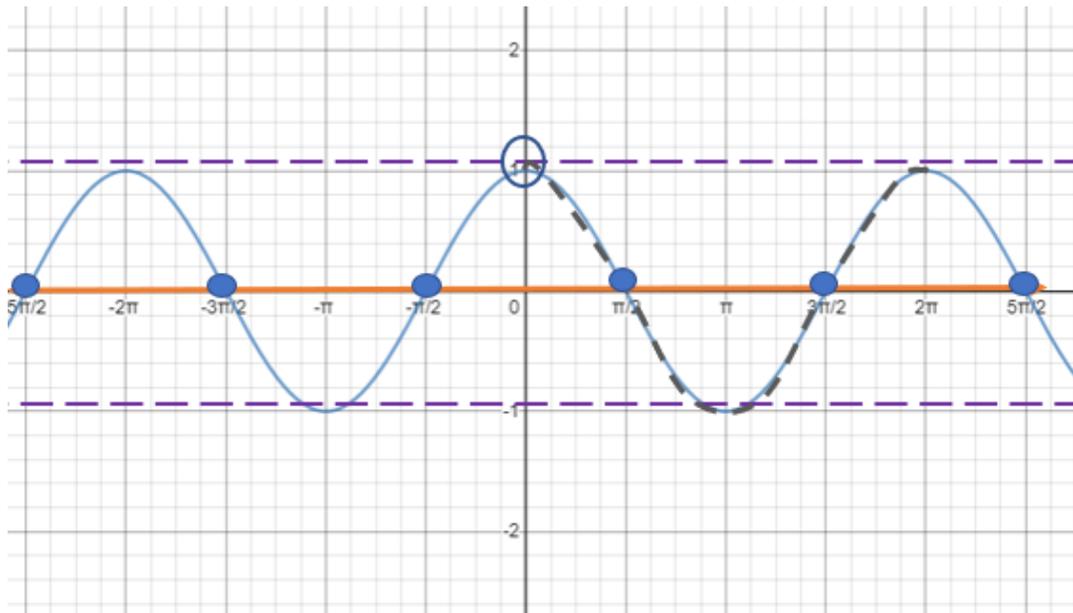
Ceros de la función (dónde la grafica toca el eje de x): ... , 0 , π , 2π ...

Valor máximo cuando $x = \frac{\pi}{2}$ y **Valor mínimo** cuando $x = \frac{3\pi}{2}$

Entre el intervalo de -2π a 2π , la función de sen es **creciente**: -2π a $-\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ a 2π

Entre el intervalo de -2π a 2π , la función de sen es **decreciente**: $-\frac{3\pi}{2}$ a $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ a $\frac{3\pi}{2}$

Gráfica de la función de coseno de x



Función: $f(x) = \cos x$

Ecuación: $y = \cos x$

↔ **Dominio** {conjunto de todos los números reales}

--- **Rango** $[-1, 1]$

~~~~~ **Período**  $2\pi$

● **Puntos de intersección:** ...  $(-\frac{3\pi}{2}, 0)$   $(-\frac{\pi}{2}, 0)$   $(\frac{\pi}{2}, 0)$   $(\frac{3\pi}{2}, 0)$   $(0, 1)$

**Ceros** de la función ( dónde la grafica toca el eje de x): ...  $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$

**Valor máximo cuando  $x = 0, 2\pi$  y Valor mínimo cuando  $x = \pi$**

Entre el intervalo de  $-2\pi$  a  $2\pi$ , la función de cos es **creciente** (dónde la gráfica de la función sube) :  $-\pi$  a  $0$  ,  $\pi$  a  $2\pi$

Entre el intervalo de  $-2\pi$  a  $2\pi$ , la función de cos es **decreciente** (dónde la gráfica de la función baja):  $-2\pi$  a  $-\pi$  ,  $0$  a  $\pi$



Imagen recuperada de <https://imgur.com/ydtk0ps4>

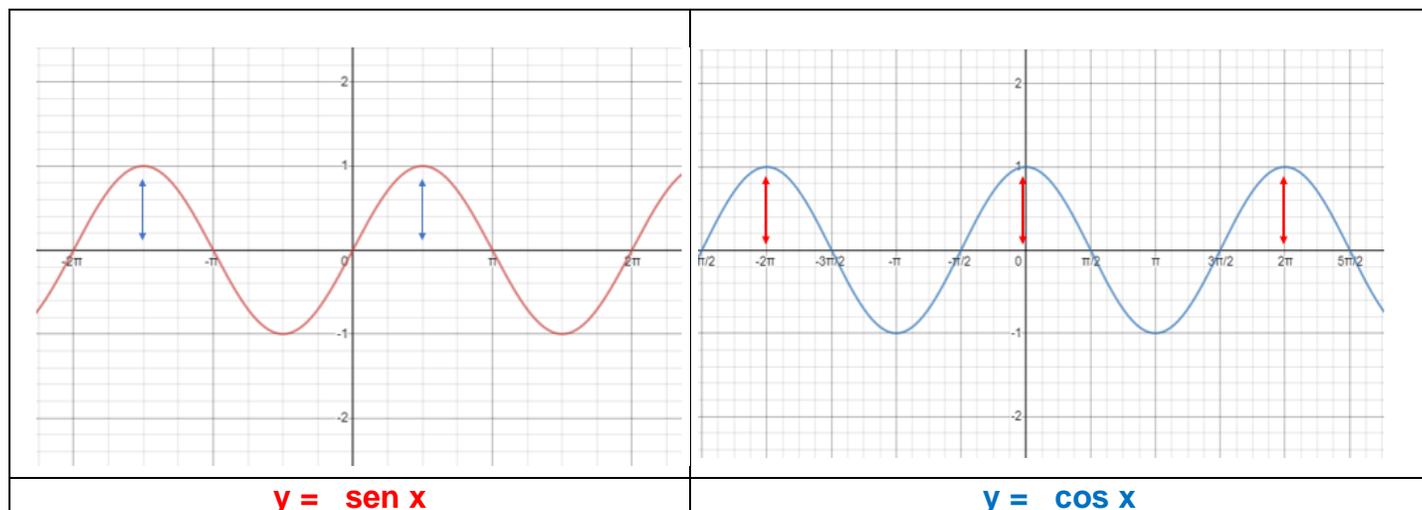
<https://youtu.be/-LWlvsSdpjg> (EIShowDelNerd,2017)

<https://youtu.be/kdBYhd2kESS> (EIShowDelNerd,2017)

## Lección 2: Amplitud y Período de las funciones seno y coseno

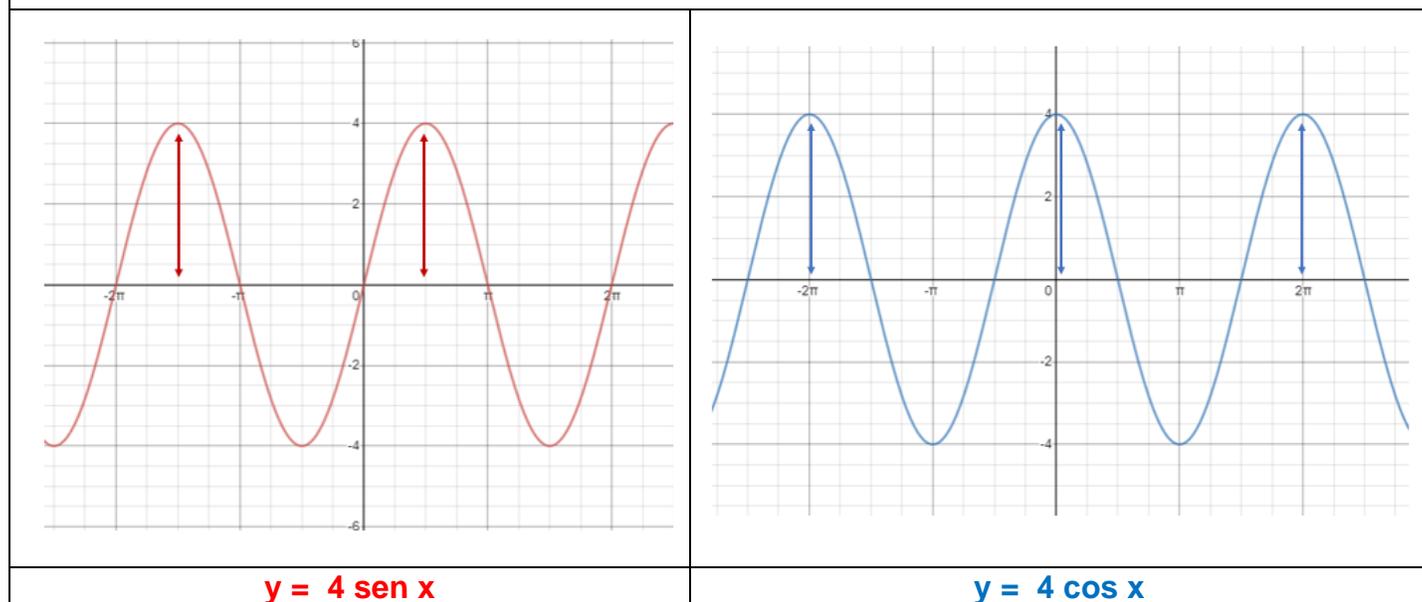
### Amplitud

Cuando nos referimos a la amplitud de las funciones de seno y coseno nos referimos a un alargamiento o acortamiento de la curva básica del seno. Veamos la gráfica de  $\sin x$  y  $\cos x$  para identificar la amplitud.



En las gráficas de  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$  la amplitud es 1. Por tal razón podemos notar que sus ondas se estiran o alzan una (1) unidad.

Ahora observemos un cambio en la amplitud.

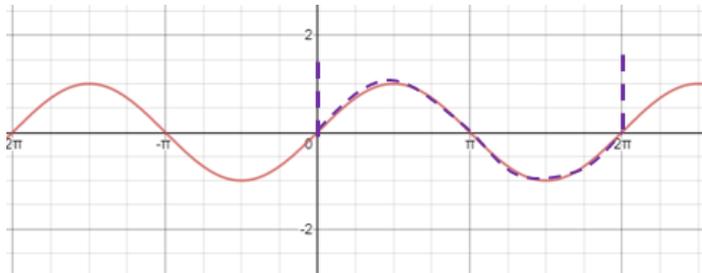


Como podemos notar, a diferencia de las gráficas  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$  las gráficas  $y = 4 \sin x$ ,  $y = 4 \cos x$  se estiran 4 unidades.

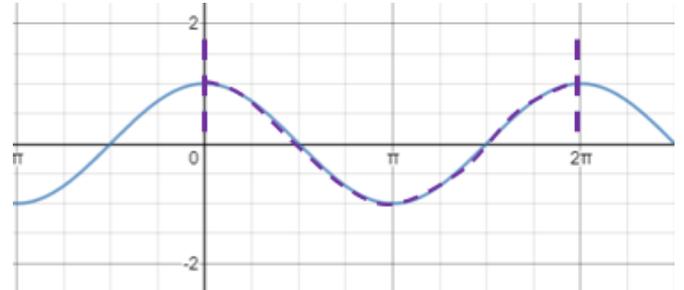
## Periodo

Previamente habíamos establecido que las funciones periódicas se comportan de manera cíclica. Los valores de  $x$  se repiten cada cierto intervalo, a la longitud del intervalo se le llama período.

$$y = \text{sen } x$$



$$y = \text{cos } x$$



El período de ambas gráficas es de  $2\pi$ .



Imagen recuperada de <https://img.youtube.com/videokg4>

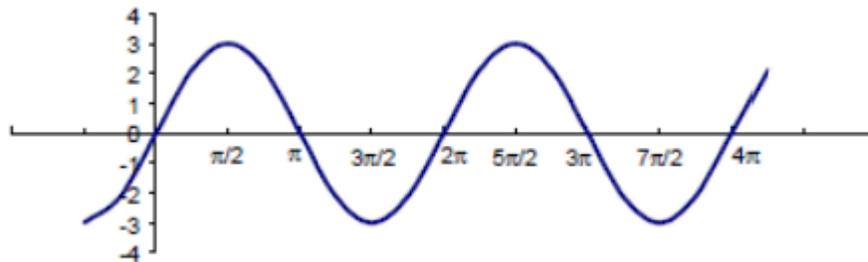
Podemos ver el siguiente video para ver el efecto de la amplitud y el periodo en una grafica de una función trigonométrica.

[https://youtu.be/SUr\\_w7xuVXI](https://youtu.be/SUr_w7xuVXI) (KhanAcademyEspañol, 2013)

### Ejercicios para Calificar

Puntuación sugerida: 20 puntos

Amplitud y Período

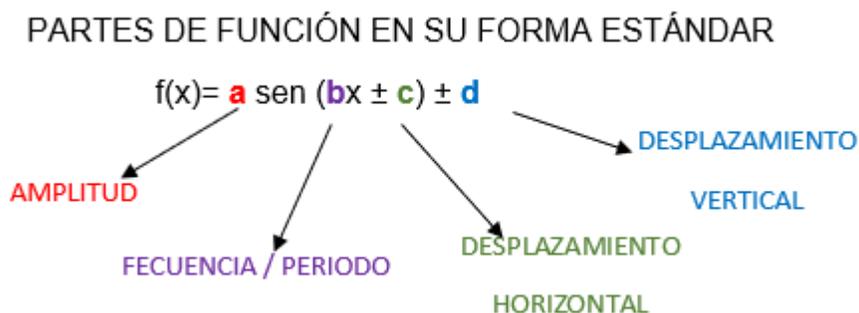


Dada la gráfica determina lo siguiente:

- amplitud
- período
- ceros de la función
- valores máximos y mínimos

### Lección 3: Forma $\pm A \sin (Bx + C) + D$

Conocemos la forma  $\pm A \sin (Bx + C) + D$  como la forma o ecuación estándar de la función. Ahora vamos a identificar las partes de una función en su forma estándar. Cada letra representa una transformación en la gráfica de las funciones. Primero estudiemos las funciones de sen y cos.



(a) Amplitud: Valor que representa el alargamiento o acortamiento de la onda y está antes de la función.

Ejemplo A:  $y = \sin x$ . La amplitud es  $|1| = 1$ . Frente a la función hay un 1, que no se escribe pero su valor absoluto es 1.

Ejemplo B:  $y = -4 \cos (2x - \pi) - 2$ . La amplitud es  $|-4| = 4$ . Frente a la función está el valor de -4 y su valor absoluto es 4. El negativo nos indica que la gráfica es una reflexión sobre el eje de x.

(b) Período: Para hallar el periodo aplicamos la fórmula  $\frac{2\pi}{b}$

Ejemplo A:  $y = \sin x$ . Frente a la variable  $x$  hay un 1, que no se escribe pero tiene valor de 1. Entonces aplicamos la fórmula para hallar periodo sustituyendo la  $b$  por el valor 1.

$$\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$$

Periodo de la gráfica  $y = \sin x$  es  $2\pi$ .

Ejemplo B:  $y = -4 \cos (2x - \pi) - 2$ . Frente a la variable  $x$  está el valor de 2. Entonces aplicamos la fórmula para hallar periodo sustituyendo la  $b$  por el valor 2.

$$\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

Periodo de la gráfica  $y = \cos 2x$  es  $\pi$ .

(c) Desplazamiento o traslación horizontal: Para hallar el desplazamiento horizontal podemos despejar el ángulo.

Ejemplo:  $y = -4 \cos (2x - \pi) - 2$ .

Despejamos el ángulo  $(2x - \pi) = 0$

$$2x - \pi = 0$$

$$2x = \pi$$

$$x = \frac{\pi}{2}$$

También podemos hallar el **desplazamiento horizontal** aplicando la siguiente fórmula  $\frac{-c}{b}$  y sustituimos con los valores que representan esas variables de la función.

*Ejemplo:*  $y = -4 \cos(2x - \pi) - 2$

$$\frac{-c}{b} = \frac{-(-\pi)}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Entonces la grafica se **traslada o desplaza**  $\frac{\pi}{2}$  unidades hacia la **derecha** porque es positivo.

**(d)** Desplazamiento o traslación vertical: El valor que representa la **d** indica cuantas unidades la grafica sube o baja de acuerdo a su signo.

*Ejemplo:*  $y = -4 \cos(2x - \pi) - 2$  El valor  $-2$  representa la  $d$  en la forma estándar. Entonces la gráfica va a trasladarse o desplazarse dos unidades hacia abajo.

### Practicando para las metas...



Observa las siguientes funciones.

$$f_1(x) = 2\text{sen}(2x - 5) + 4$$

$$f_2(x) = 5\text{sen}(2x - 5) + 4$$

¿Qué cambio ocurre en la gráfica de  $f_1(x)$  al transformarse en  $f_2(x)$ ?

- A un aumento en la amplitud
- B una disminución en el periodo
- C un cambio de fase a la derecha
- D un deslizamiento vertical

A) Un aumento en la amplitud

### A. ¿Qué vamos entendiendo? Ejercicios de Práctica

Explica el comportamiento de las gráficas de las siguientes funciones:

A)  $y = \frac{1}{2} \text{sen } x$

B)  $y = -\text{cos } x$

C)  $y = 2 \text{sen } 2x + 3$

*Respuestas correctas*

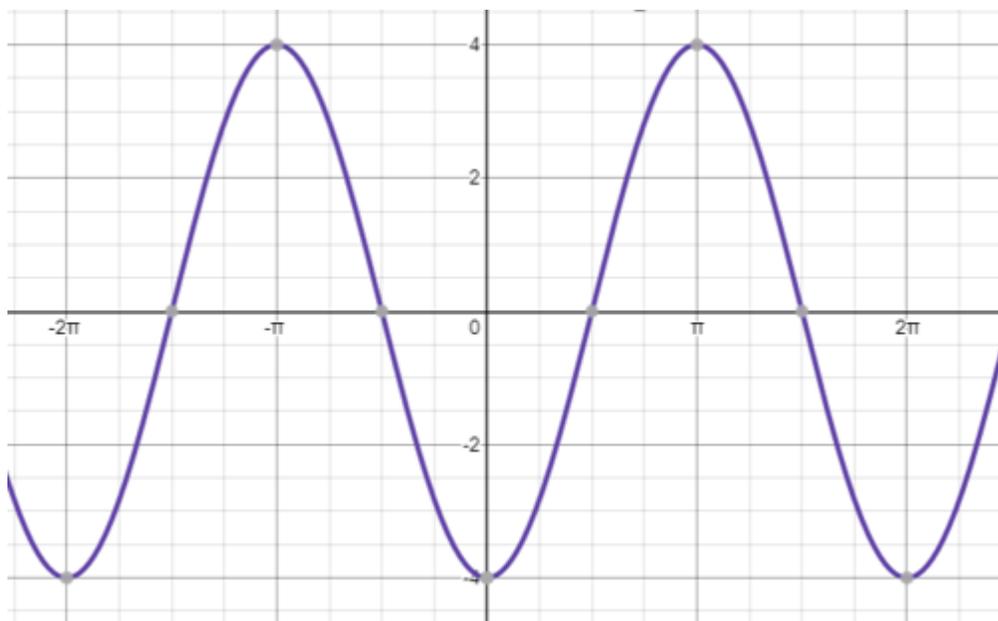
*A) Ocurre una reducción a la mitad de la onda de la grafica de seno.*

*B) Ocurre una reflexión de la gráfica de cos.*

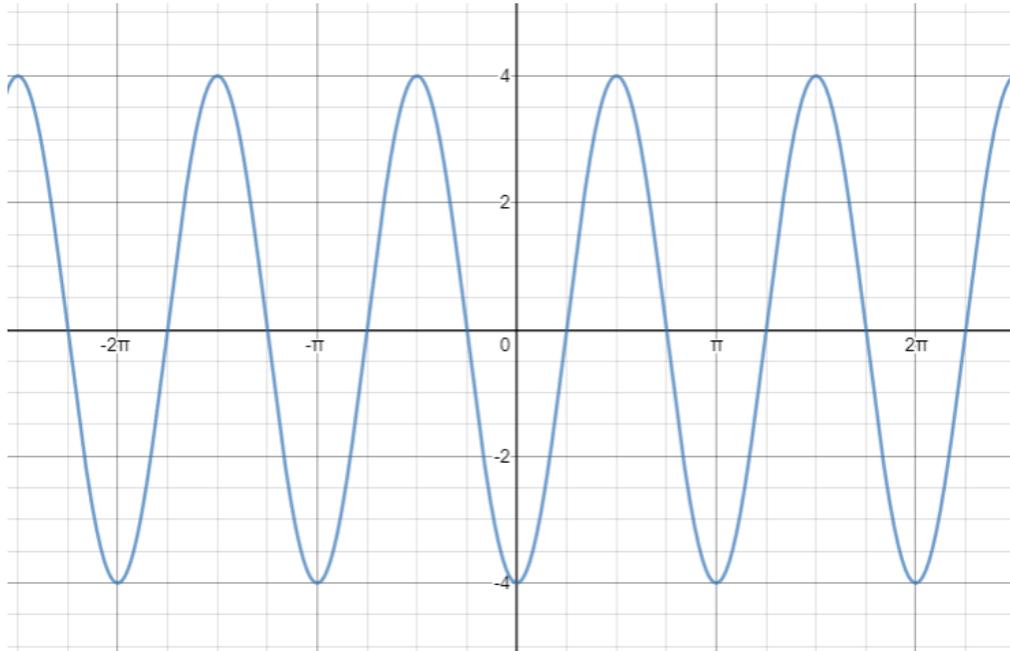
*C) Ocurre un aumento en la amplitud de la onda de la gráfica de seno su periodo cambia a  $\pi$  y se traslada hacia arriba tres unidades.*

Veamos por partes el comportamiento de la gráfica  $y = -4 \cos(2x - \pi) - 2$ . Observemos las transformaciones de la gráfica en la amplitud, periodo, desfase horizontal y el desfase vertical.

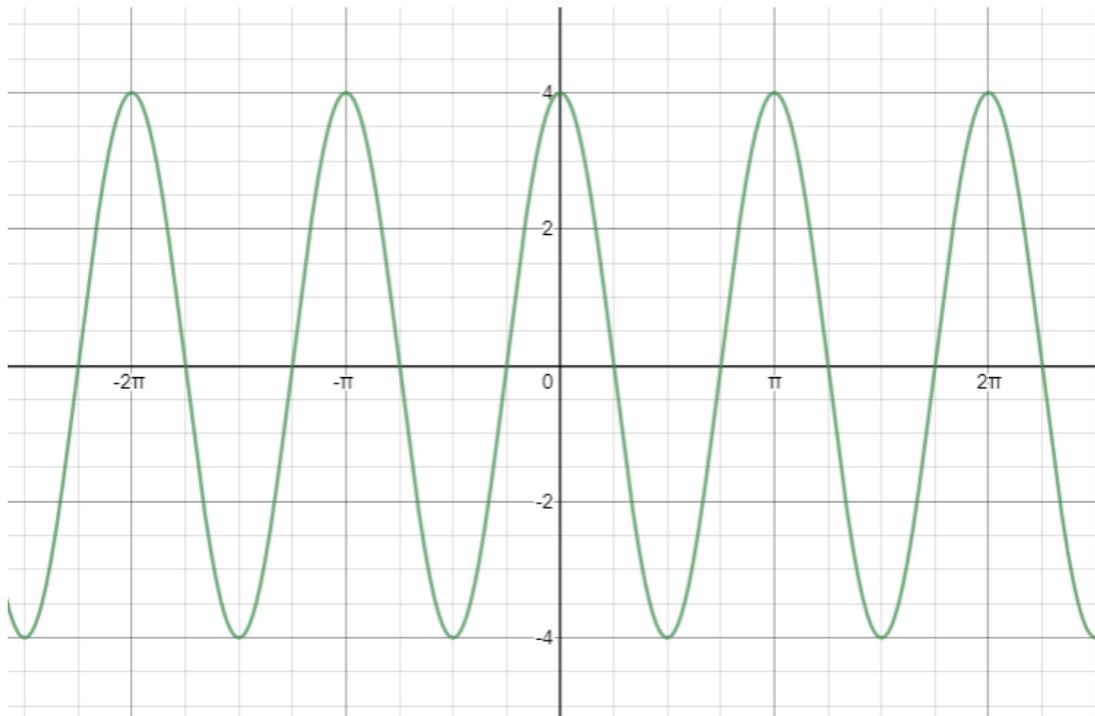
$y = -4 \cos x$   
Aumento en la amplitud y Reflexión



$y = -4 \cos 2x$   
Aumento en la amplitud, Reflexión y Cambio en el periodo

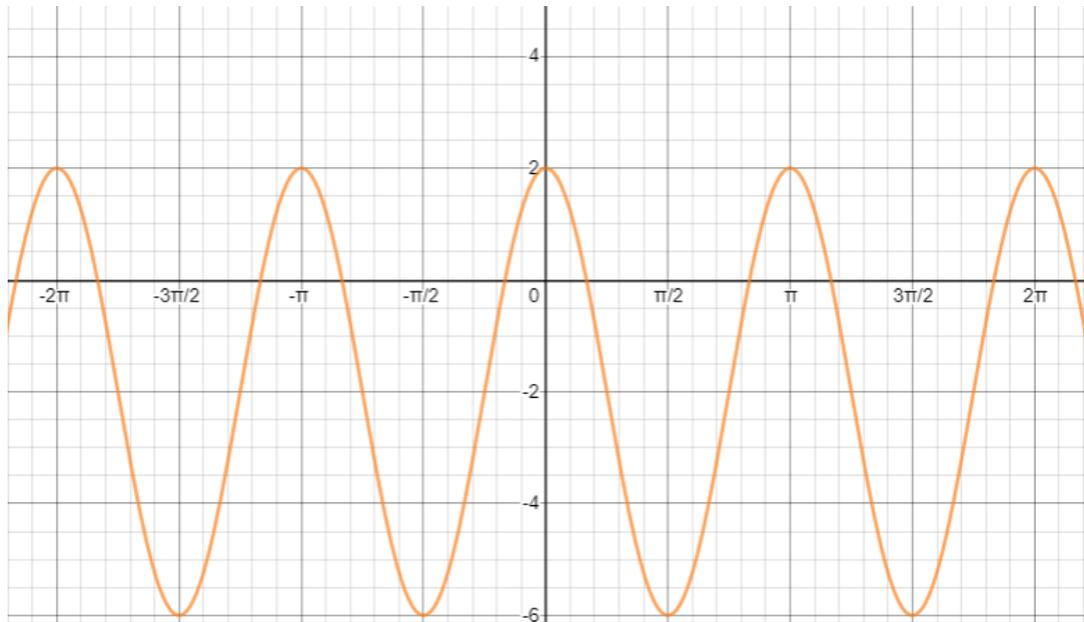


$y = -4 \cos (2x - \pi)$   
Aumento en la amplitud, Reflexión, Cambio en el periodo y Desfase horizontal



$$y = -4 \cos(2x - \pi) - 2$$

Aumento en la amplitud, Reflexión, Cambio en el periodo, Desfase horizontal y Desfase vertical



Para conocer más sobre las formas estándar de las funciones de sen y coseno y el comportamiento de sus graficas podemos ver el siguiente video: <https://youtu.be/ZBVVdWprwW4> (mathgc, 2012)

De no tener una calculadora gráfica, podemos utilizar herramientas de la web como Desmos Graph, Geogebra y MathWay para trazar gráficas y ver su comportamiento.

### Ejercicios para Calificar

Puntuación sugerida: 60 puntos

Tarea de Desempeño: Guía de gráficas trigonométrica

Los estudiantes demostrarán su comprensión de cómo trazar funciones trigonométricas creando una guía de gráficas.

Crearán una guía paso a paso de las graficas de las siguientes funciones trigonométricas:

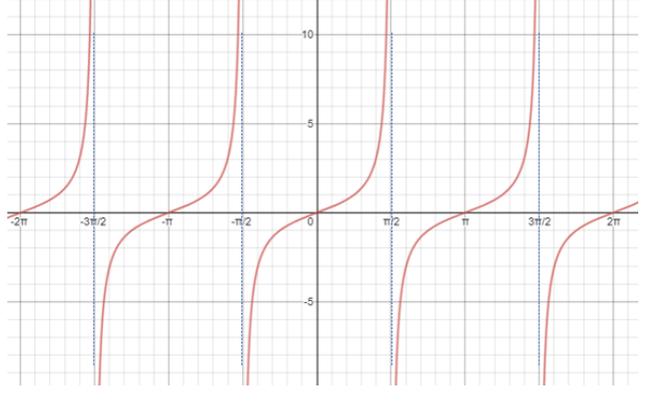
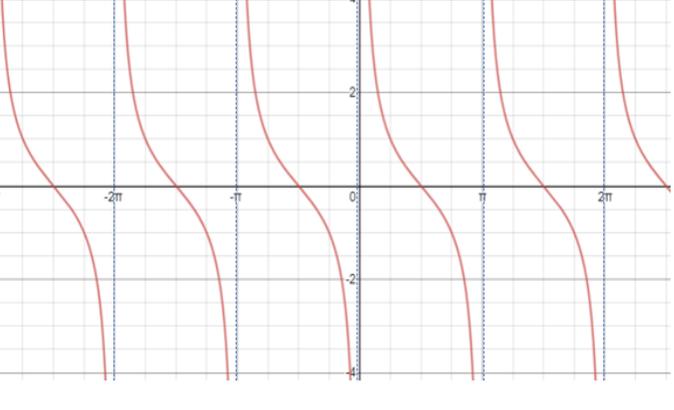
- 1)  $f(x) = \text{sen } x + 3$
- 2)  $y = -2\cos(2x - \pi) - 1$
- 3)  $f(x) = 2 \cos(2x - \pi)$
- 4)  $y = \frac{1}{2}\text{sen } x$
- 5)  $y = -\cos x$
- 6)  $y = 4\text{sen}(2x + \pi) - 2$

Deben explicar para cada gráfica:

- amplitud
- periodo
- Describir las traslaciones horizontales, verticales y si ocurre una reflexión.

## Tangente, Cotangente, Secante y Cosecante

Recordemos que la función secante es la función recíproca de coseno, la función cosecante es la función recíproca de seno y las funciones tangente y cotangente son recíprocas entre sí. Las funciones secante (sec), cosecante (csc), tangente (tan) y cotangente (cot) se comportan de similar manera a las de seno y coseno (periodo, amplitud, desfase horizontal y desfase vertical), pero ahora debemos añadir las **asíntotas**. Las asíntotas son líneas que se extienden hacia el infinito e impiden que las gráficas las intersequen. Las **funciones trigonométricas** tienen **asíntotas** verticales en aquellos puntos en que se anula el denominador, lo cual ocurre de manera periódica. Visualmente no las vemos pero sí notamos que las gráficas se acercan a un punto y no lo cruzan. Veamos algunos ejemplos en las gráficas de tan y cot.

| y= tan x                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | y= cot x                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| <p>Puntos de intersección de la gráfica:<br/>           ... <math>(-2\pi, 0)</math> <math>(-\pi, 0)</math> <math>(0,0)</math> <math>(\pi,0)</math> <math>(2\pi, 0)</math> ...<br/>           La gráfica de tangente tiene asíntotas verticales donde el <math>\cos = 0</math>.<br/>           Recordemos:<br/>           Si <math>\tan = \frac{\text{sen}}{\text{cos}}</math> y el valor de <math>\cos = 0</math>, entonces la función no está definida. La función tan no está definida para... <math>-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}</math>..., notemos las asíntotas.</p> | <p>Puntos de intersección de la gráfica:<br/>           ... <math>(-\frac{3\pi}{2}, 0)</math> <math>(-\frac{\pi}{2}, 0)</math> <math>(\frac{\pi}{2}, 0)</math> <math>(\frac{3\pi}{2}, 0)</math> ...<br/>           La gráfica de cotangente tiene asíntotas verticales donde el <math>\text{sen} = 0</math>.<br/>           Recordemos:<br/>           Si <math>\cot = \frac{\text{cos}}{\text{sen}}</math> y el valor de <math>\text{sen} = 0</math>, entonces la función no está definida. La función cot no está definida para... <math>-2\pi, \pi, 0, 2\pi</math>..., notemos las asíntotas.</p> |



Ver el siguiente video: <https://youtu.be/KI2WTyUXjgA>, para conocer más sobre las gráficas de tangente y cotangente.

### Ejercicios para Calificar

Puntuación sugerida: 48 puntos

Cuatro Funciones Restantes

Fuente: [http://www.doe.state.la.us/topics/comprehensive\\_curriculum.html](http://www.doe.state.la.us/topics/comprehensive_curriculum.html) 1

Las cuatro funciones restantes

Puedes utilizar papel cuadriculado para trazar las gráficas de las funciones.

Asegúrate de que los ejes tengan una escala apropiada y estén debidamente

rotulados. Por cada gráfica halla:

- 1) el periodo
- 2) el cambio de fase
- 3) las asíntotas
- 4) la ubicación y valor de los puntos máximos, de haberlos
- 5) la ubicación y valor de los puntos mínimos, de haberlos
- 6) ¿Alguna intercepción en x o en y? Si los hay, ¿dónde están?
- 7) Corroborar tu dibujo con una calculadora gráfica.

1.  $y = \csc 2x$

2.  $y = \tan x + \frac{\pi}{2}$

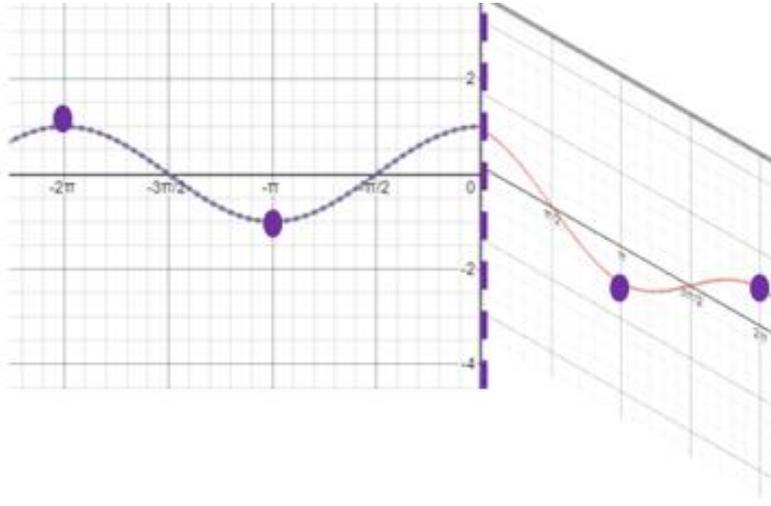
3.  $y = 2\sec x - 1$

4.  $y = -\cot x - \frac{\pi}{4}$

## Lección 4: Simetría y Paridad de las funciones sen y cos

¿Qué es simetría?

Imaginemos que podemos doblar la gráfica de  $y = \cos x$ , por el eje  $y$ . Si los puntos de la grafica coinciden y quedan unos sobre los otros, entonces la gráfica es simétrica respecto al eje  $y$ .



Una función **par** es simétrica respecto al eje de  $y$ . Cumple con el criterio que los puntos de negativo  $x$  coinciden con los de positivo  $x$   $f(-x) = f(x)$ . Coseno es una función que tiene simetría respecto al eje de  $y$ , por lo tanto es una función par.

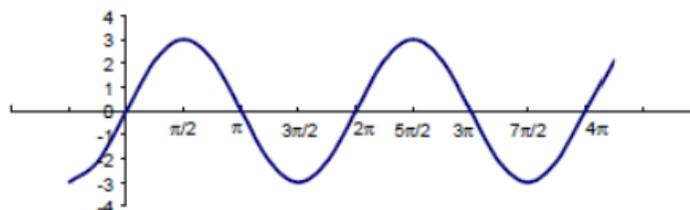
$$\cos(-x) = \cos(x)$$

Una función **impar** es simétrica respecto al origen. Para que los puntos en las graficas de las funciones impares coincidan, primero tendríamos que doblar la gráfica por el eje de  $y$ , luego por eje de  $x$ . Seno es una función impar que tiene simetría respecto al origen, por lo tanto es una función impar. En la grafica de sen, un elemento  $(-x)$  es la imagen opuesta de dicho elemento  $(x)$  y satisface la ecuación  $f(-x) = -f(x)$ .

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

### Ejercicios para Calificar

Puntuación sugerida: 30 puntos  
Graficando Funciones Trigonómicas

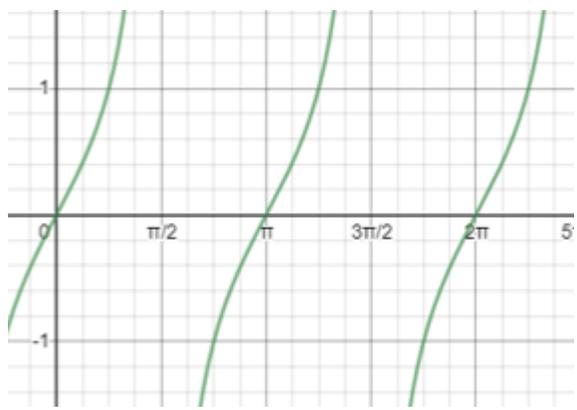
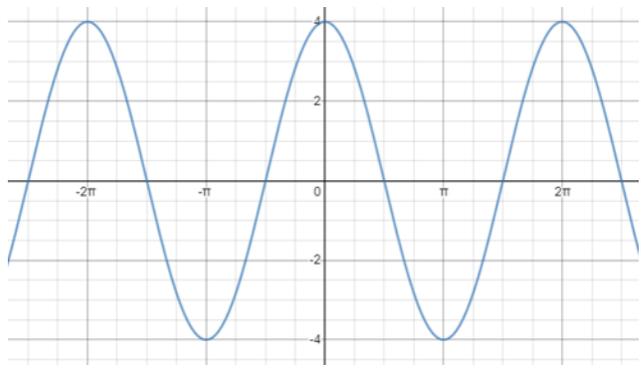


Dada la gráfica anterior determina lo siguiente:

1. ¿Cuál función representa la gráfica?
2. Determina su periodo.
3. ¿Es una función par o impar?
4. Determina la ecuación de la gráfica.

Prueba Unidad III: Funciones Trigonómicas y sus graficas Valor sugerido: 60 puntos

**Demuestra el procedimiento para hallar tu respuesta y explica en oraciones completas cuando la pregunte lo amerite.**

|                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                      |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>1) Selecciona la ecuación que represente la gráfica:</p> <p>a) <math>y = 3 \tan x</math></p> <p>b) <math>f(x) = \cos x</math></p> <p>c) <math>y = \tan x</math></p> <p>d) <math>f(x) = \cot x</math></p>        |   |
| <p>2) La gráfica de cotangente tiene asíntotas verticales donde el <math>\cos = 0</math>.</p> <p>a) Cierto</p> <p>b) Falso</p> <p>Explique</p>                                                                     |                                                                                      |
| <p>3) Selecciona la ecuación que represente la gráfica:</p> <p>a) <math>y = 4 \sin x</math></p> <p>b) <math>f(x) = 4 \cos x</math></p> <p>c) <math>y = -4 \cos 2x</math></p> <p>d) <math>f(x) = \sin 4x</math></p> |  |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |  |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| <p>4) <math>\cos(-x) = \cos x</math><br/> Determina si la función es:<br/> a) Par<br/> b) Impar</p>                                                                                                                                                                                                             |  |
| <p>5) Sin trazar la gráfica de la función, ¿qué transformación ocurre entre la ecuación de la gráfica a y la ecuación de la gráfica b? Explica</p> <p>a) <math>y = 2 \cos 2 \left( \theta - \frac{\pi}{3} \right) + 3</math></p> <p>b) <math>y = -2 \cos 2 \left( \theta - \frac{\pi}{3} \right) + 3</math></p> |  |
| <p>6) Selecciona la ecuación que represente la gráfica:</p> <p>a) <math>y = \sin x</math><br/> b) <math>f(x) = \cos x</math><br/> c) <math>y = \tan x</math><br/> d) <math>f(x) = \cot x</math></p>                                                                                                             |  |
| <p>7) Traza la gráfica de la función, <math>y = 2 \tan x</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                            |  |

8) Sin trazar la gráfica de la función, ¿qué transformaciones ocurren entre la ecuación de la gráfica a y la ecuación de la gráfica b?

Explica

a)  $y = 2 \cos 2 \left( \theta - \frac{\pi}{3} \right) + 3$

b)  $y = -2 \cos \left( \theta - \frac{\pi}{3} \right) + 3$

9) Dada la función  $y = 3 \sin \left( 2x - \frac{\pi}{4} \right) + 2$  contesta las siguientes preguntas:

a. ¿Cuál es la amplitud?

b. ¿Cuál es el período?

c. ¿Cuál es la frecuencia?

d. ¿Hay un deslizamiento horizontal? \_\_\_\_\_ Si es así, el deslizamiento está a \_\_\_\_\_

unidades a la derecha/izquierda.

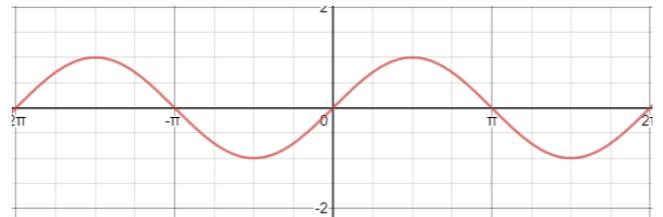
e. ¿Hay un deslizamiento vertical? \_\_\_\_\_ Si es

así, el deslizamiento está a \_\_\_\_\_ unidades hacia arriba o hacia abajo.

10) Dada la siguiente gráfica, determina:

a) simetría

b) par o impar



# Unidad IV: Identidades Trigonométricas



|                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|----------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Unidad IV:                                               | <b>Identidades Trigonómicas</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| <b>Lección 5</b><br><b>Lección 6</b><br><b>Lección 7</b> | Identidades Pitagóricas<br>Fórmulas de adición y diferencia para sen, cos y tan<br>Fórmulas de Ángulo Doble y Ángulo Medio                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| Objetivos de aprendizaje:                                | Al finalizar las lecciones podremos: <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Definir y demostrar la Identidad Pitagórica Fundamental.</li> <li>✓ Diferenciar entre fórmulas de ángulo doble y ángulo medio para calcular el seno y el coseno del ángulo.</li> <li>✓ Demostrar que un ángulo de triángulo rectángulo se cumplen las identidades fundamentales: recíprocas, de cocientes, pitagóricas, ángulos negativos.</li> </ul> |
| Expectativas e Indicadores:                              | <b>ES.G.33.2</b><br>Cómo aplicar una variedad de identidades trigonométricas, incluyendo las fórmulas de ángulo doble y ángulo medio.<br><b>ES.G.33.4</b><br>Cómo interpretar identidades trigonométricas para evaluar funciones trigonométricas.                                                                                                                                                                                   |

Conceptos de la unidad:

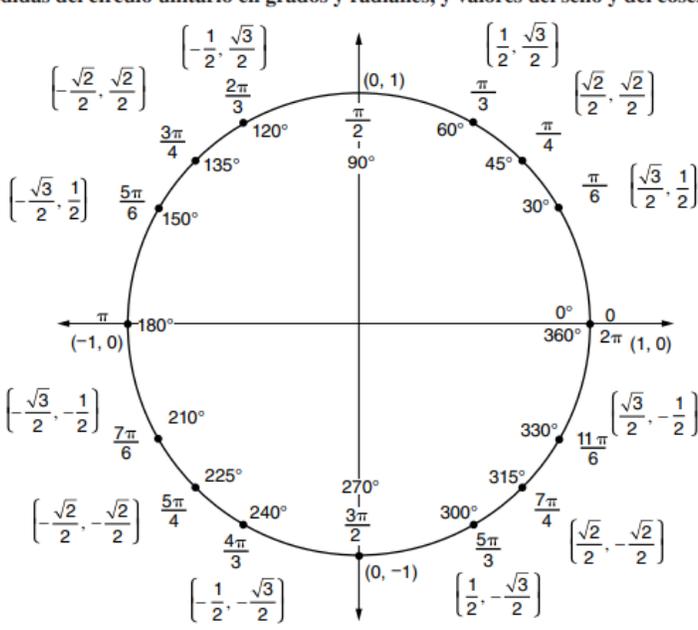
Identidad  
Identidades Recíprocas  
Identidades Cociente  
Identidades Pitagóricas  
Fórmula de Ángulo Doble  
Fórmula de Ángulo Medio  
Fórmula de la Adición y  
Diferencia

## Lección 5: Identidad Pitagórica

Antes de comenzar a estudiar la identidad pitagórica debemos recordar las funciones trigonométricas fundamentales previamente estudiadas.

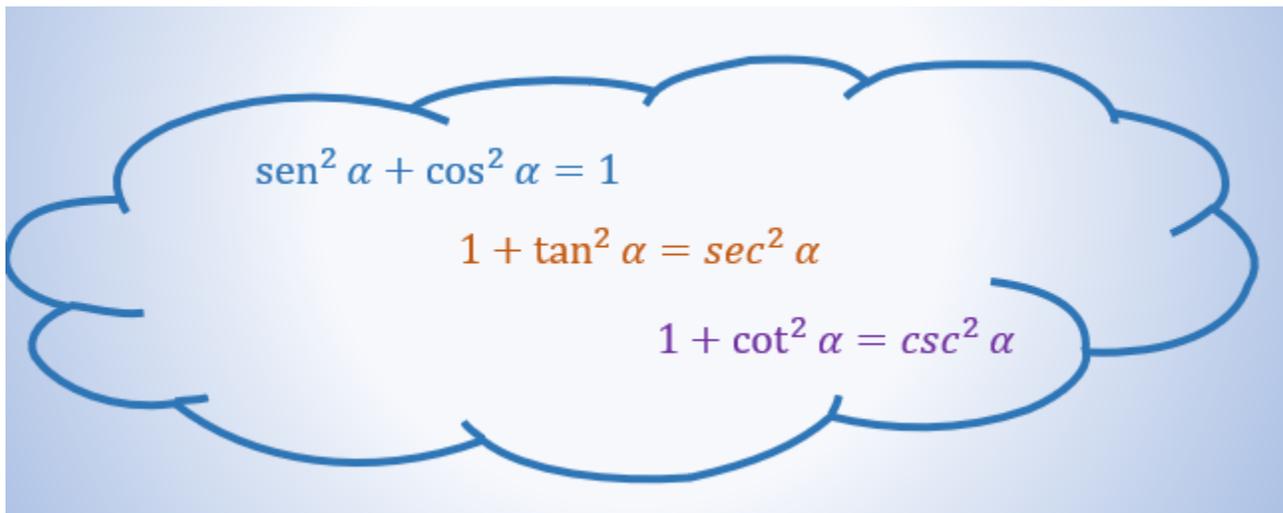
|                                           |                                           |                                           |                                                                            |
|-------------------------------------------|-------------------------------------------|-------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|
| $\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$ | $\cos x = \frac{1}{\operatorname{sec} x}$ | $\tan x = \frac{1}{\operatorname{cot} x}$ | $\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x}$               |
| $\operatorname{sen} x = \frac{1}{\csc x}$ | $\operatorname{sec} x = \frac{1}{\cos x}$ | $\operatorname{cot} x = \frac{1}{\tan x}$ | $\operatorname{cot} x = \frac{\operatorname{cos} x}{\operatorname{sen} x}$ |
| Identidades Recíprocas                    |                                           |                                           | Identidades Cociente                                                       |

Usamos las identidades trigonométricas para evaluar funciones. Vamos a evaluar  $\sec \frac{\pi}{3} + 2 \cot \frac{\pi}{4}$  usando la información anterior y el círculo unitario para evaluar.

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\sec \frac{\pi}{3} + 2 \cot \frac{\pi}{4}$ <p>Primero determinamos que <math>\sec \frac{\pi}{3} =</math></p> $\sec \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ <p>Luego determinamos que <math>\cot \frac{\pi}{4} =</math></p> $\cot \frac{\pi}{4} = \frac{\cos \frac{\pi}{4}}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$ | <p>Medidas del círculo unitario en grados y radianes, y valores del seno y del coseno</p>  <p>The diagram shows a unit circle with the following points and coordinates:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>0° (0 rad): (1, 0)</li> <li>30° (π/6 rad): (√3/2, 1/2)</li> <li>45° (π/4 rad): (√2/2, √2/2)</li> <li>60° (π/3 rad): (1/2, √3/2)</li> <li>90° (π/2 rad): (0, 1)</li> <li>120° (2π/3 rad): (-1/2, √3/2)</li> <li>135° (3π/4 rad): (-√2/2, √2/2)</li> <li>150° (5π/6 rad): (-√3/2, 1/2)</li> <li>180° (π rad): (-1, 0)</li> <li>210° (7π/6 rad): (-√3/2, -1/2)</li> <li>225° (5π/4 rad): (-√2/2, -√2/2)</li> <li>240° (4π/3 rad): (-1/2, -√3/2)</li> <li>270° (3π/2 rad): (0, -1)</li> <li>300° (5π/3 rad): (1/2, -√3/2)</li> <li>315° (7π/4 rad): (√2/2, -√2/2)</li> <li>330° (11π/6 rad): (√3/2, -1/2)</li> <li>360° (2π rad): (1, 0)</li> </ul> |
| <p>Sustituimos en la expresión</p> $\sec \frac{\pi}{3} + 2 \cot \frac{\pi}{4}$ $2 + 2(1)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| <p>Resolvemos</p> $2 + 2(1) = 4$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |

| B. ¿Qué vamos entendiendo?      Ejercicios de Práctica                                                                                               |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Completa el ejercicio<br><br>$\tan \frac{\pi}{3} + 2 \cos \frac{\pi}{6}$<br>$\sqrt{3} + 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$<br>=<br><br>$2\sqrt{3}$ |

Ahora usaremos las **Identidades Pitagóricas** para evaluar funciones trigonométricas. Las identidades pitagóricas son:



### Identidad Pitagórica Fundamental

El seno al cuadrado más coseno al cuadrado es igual a uno ( $\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$ ).

Lo obtenemos al aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo que se forma en el círculo unitario. La identidad Pitagórica se puede utilizar para reescribir o evaluar otras expresiones trigonométricas equivalentes. También se utilizan cuando estamos simplificando o factorizando expresiones trigonométricas. Veamos algunos ejemplos de las identidades pitagóricas y aplicaciones de las mismas:

| Identidad Pitagórica                                                                                                                                                                                                  | Ejemplos                                                                                                                                                                                                        |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$<br>De la identidad pitagórica podemos obtener otras igualdades:<br>$\text{sen}^2 \alpha = 1 - \text{cos}^2 \alpha$<br>$\text{cos}^2 \alpha = 1 - \text{sen}^2 \alpha$ | A) Simplifiquemos la expresión: $1 - \text{sen}^2 \alpha (\text{cos}^2 \alpha)$<br><br>$1 - \text{sen}^2 \alpha (\text{cos}^2 \alpha)$ Sustituimos<br>$\text{cos}^2 \alpha (\text{cos}^2 \alpha)$ Multiplicamos |

|                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                                                               | $= \cos^4 \alpha$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| $1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$<br>También podemos obtener:<br>$\tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha - 1$<br>$1 = \sec^2 \alpha - \tan^2 \alpha$ | B) Simplifiquemos la expresión: $\frac{\sen \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{1 + \sen \theta}$<br>Combinemos las fracciones usando un común denominador<br>$\frac{\sen \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{1 + \sen \theta} = \frac{\sen \theta(1 + \sen \theta) + \cos^2 \theta}{\cos \theta(1 + \sen \theta)}$                                                                       |
| $1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$<br>También podemos obtener:<br>$1 = \csc^2 \alpha - \cot^2 \alpha$<br>$\cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha - 1$ | $= \frac{\sen \theta(1 + \sen \theta) + \cos^2 \theta}{\cos \theta(1 + \sen \theta)}$ Multipliquemos<br>$= \frac{\sen \theta + \sen^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos \theta(1 + \sen \theta)}$ Identidad Pitagórica<br>$= \frac{\cancel{\sen \theta} + 1}{\cos \theta(1 + \cancel{\sen \theta})}$ Simplificamos y cancelamos<br>$= \frac{1}{\cos \theta}$ Usamos identidad recíproca<br>$= \sec \theta$ |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Demostración de Identidades Trigonómicas</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | <b>Ejemplo</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| Podemos demostrar que una ecuación trigonométrica determinada es una identidad aplicando una serie de claves o una serie de guía para facilitar el proceso:<br><ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Podemos empezar con un lado. El objetivo es transformar un lado en el otro.</li> <li>✓ Apliquemos álgebra y usemos las identidades conocidas para simplificar las expresiones. De ser necesario trabajemos los denominadores comunes y factorizar.</li> </ul> | Demostremos que:<br>$csc x - cot x (\cos x) = \sen x$<br>$csc x - cot x (\cos x) = \sen x$ Sustituimos por identidades recíprocas<br>$\frac{1}{\sen x} - \frac{\cos x}{\sen x} (\cos x) = \sen x$ Multiplicamos<br>$\frac{1}{\sen x} - \frac{\cos^2}{\sen x} = \sen x$<br>$\frac{1 - \cos^2 x}{\sen x} = \sen x$ Común denominador |

- ✓ Intentar reescribir en términos de seno y coseno.

$$\frac{1 - \cos^2 x}{\sin x}$$

*Observemos que podemos sustituir por una Identidad pitagórica fundamental para llegar a  $\sin x$ , entonces nos queda...*

$$\frac{\sin^2 x}{\sin x} = \sin x$$

**$\sin x = \sin x$**  ¡Quedó demostrado!

### Ejercicios para Calificar

Puntuación sugerida: 15 puntos

Escriba la expresión trigonométrica en términos de  $\sin$ ,  $\cos$  y simplifica:

1.  $\cos x \tan x$

2.  $\tan^2 x - \sec^2 x$

3. Demuestre que ...

$$\frac{\sin \theta}{\tan \theta} = \cos \theta$$

## Lección 6: Fórmulas de adición y diferencia para sen, cos y tan

### FÓRMULAS DE ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN

**Fórmulas para seno:**  $\sin(s + t) = \sin s \cos t + \cos s \sin t$

$$\sin(s - t) = \sin s \cos t - \cos s \sin t$$

**Fórmulas para coseno:**  $\cos(s + t) = \cos s \cos t - \sin s \sin t$

$$\cos(s - t) = \cos s \cos t + \sin s \sin t$$

**Fórmulas para tangente:**  $\tan(s + t) = \frac{\tan s + \tan t}{1 - \tan s \tan t}$

$$\tan(s - t) = \frac{\tan s - \tan t}{1 + \tan s \tan t}$$

Imagen recuperada de file:///D:/precalculo\_matematicas\_para\_el\_calculo-1%20(1).pdf

Usemos las fórmulas de suma y diferencia para resolver expresiones hallando su valor exacto.

Ejemplo A: Queremos hallar el valor exacto de  $\cos 75^\circ$

Veamos que  $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$ . Conocemos los valores exactos de  $\cos 45^\circ$  y  $30^\circ$ , entonces usamos la Fórmula de la Adición para coseno.

$$\cos(s + t) = \cos s \cos t - \sin s \sin t$$

$\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ)$  Sustituimos por la fórmula de adición para coseno

$$= \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2}$$
 Sustituimos por los valores exactos de la función (busca en el círculo unitario)

y Simplificamos

$$= \frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{4} - \frac{\sqrt{2}(1)}{4} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6-\sqrt{2}}}{4}$$

$$\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6-\sqrt{2}}}{4}$$

Podemos verificar usando una calculadora científica o gráfica que el valor de  $\cos 75$  grados  $\approx .2588$

$$y \frac{\sqrt{6-\sqrt{2}}}{4} \approx .2588$$

Ejemplo B: Encontramos el valor exacto de  $\sin 20^\circ \cos 40^\circ + \cos 20^\circ \sin 40^\circ$

$\sin (s + t) = \sin s \cos t + \cos s \sin t$  Usemos la fórmula de adición para seno

$$\sin 20^\circ \cos 40^\circ + \cos 20^\circ \sin 40^\circ = \sin (20^\circ + 40^\circ)$$

$$= \sin (60^\circ) \text{ Sustituimos por el valor exacto de la función}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ valor de } \sin 60^\circ$$

$$\text{Entonces } \sin 20^\circ \cos 40^\circ + \cos 20^\circ \sin 40^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

### Ejercicios para Calificar

Puntuación sugerida: 20 puntos

Use la fórmula de la adición o diferencia para hallar el valor exacto de las expresiones:

1.  $\sin 75^\circ$

2.  $\cos 105^\circ$

3.  $\sin 15^\circ$

4.  $\tan 15^\circ$

## Ejercicios para Calificar

**Tarea de Desempeño:** Encontrar errores en identidades trigonométricas  
Puntuación sugerida: 30 puntos

¿Dónde lo hice mal? Encuentra la parte del problema que hice incorrecta y enciérrala en un círculo con un lapicero/lápiz/marcador de color distinto.  
Describe lo que debí haber hecho.

1)  $\cos(15^\circ) =$

$$\begin{aligned} & \cos(45-30) \\ & \cos 45 \cos 30 + \sin 45 \sin 30 \\ & \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ & \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \\ & \frac{2\sqrt{2}}{4} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}} \end{aligned}$$

2)  $\tan(60^\circ + 45^\circ)$

$$\begin{aligned} & \frac{\tan 60 + \tan 45}{1 - \tan 60 \tan 45} \\ & \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}(1)} \\ & \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} \cdot \frac{(1 - \sqrt{3})}{(1 - \sqrt{3})} \\ & \frac{\sqrt{3} - 3 + 1 - \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3} - \sqrt{3} + 3} \\ & \frac{-2}{4 - 2\sqrt{3}} \cdot \frac{(\sqrt{3})}{(\sqrt{3})} \\ & \frac{-2\sqrt{3}}{4 - 2 \cdot 3} \\ & \frac{-2\sqrt{3}}{4 - 6} \\ & \frac{-2\sqrt{3}}{-2} = \boxed{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

## Lección 7: Fórmulas de Ángulo Doble y Ángulo Medio

### FÓRMULAS DE ÁNGULO DOBLE

**Fórmula para seno:**  $\text{sen } 2x = 2 \text{ sen } x \text{ cos } x$

**Fórmula para coseno:**  $\text{cos } 2x = \text{cos}^2 x - \text{sen}^2 x$   
 $= 1 - 2 \text{sen}^2 x$   
 $= 2 \text{cos}^2 x - 1$

**Fórmula para tangente:**  $\text{tan } 2x = \frac{2 \text{ tan } x}{1 - \text{tan}^2 x}$

Imagen recuperada de file:///D:/precalculo\_matematicas\_para\_el\_calculo-1%20(1).pdf

Usando la fórmula de **ángulo doble**

Hallemos el valor de **sen 120 grados** usando la fórmula de ángulo doble para seno. Recordemos que podemos buscar el valor del sen de  $60^\circ$  y que  $2 \text{ veces } 60^\circ = 120^\circ$ . Por lo tanto  $\text{sen } 120^\circ = \dots$

$\text{sen } 2 (60^\circ) = 2 \text{ sen } (60^\circ) \text{ cos } (60^\circ)$  Usamos la fórmula de ángulo doble para sen

$= 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left( \frac{1}{2} \right)$  Sustituimos por los valores de la función para los ángulos y Multiplicamos y simplificamos la expresión

$$= \frac{2\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{sen } 2 (60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

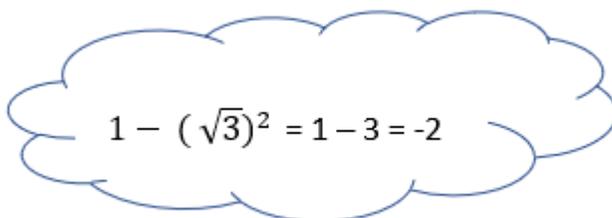
Hallemos el valor de **tan 120 grados** usando la fórmula de ángulo doble para tan.

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \quad \text{Usamos la fórmula de ángulo doble para tan}$$

$$\tan 2(60^\circ) = \frac{2 \tan 60}{1 - \tan^2 60} \quad \text{Sustituimos por los valores de la función para los ángulos}$$

$$\tan 2(60^\circ) = \frac{2(\sqrt{3})}{1 - (\sqrt{3})^2}$$

$$\tan 2(60^\circ) = \frac{2\sqrt{3}}{1 - (\sqrt{3})^2}$$



$$1 - (\sqrt{3})^2 = 1 - 3 = -2$$

$$\tan 2(60^\circ) = \frac{2\sqrt{3}}{-2} \quad \text{Simplificamos y cancelamos}$$

$$= -\sqrt{3}$$

Ahora trabajaremos algunos ejemplos de las fórmulas de ángulo medio (semiángulo). Observemos las fórmulas, se refieren a la mitad del ángulo en cuestión.

### FÓRMULAS DE SEMIÁNGULO

$$\sin \frac{u}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos u}{2}} \quad \cos \frac{u}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos u}{2}}$$

$$\tan \frac{u}{2} = \frac{1 - \cos u}{\sin u} = \frac{\sin u}{1 + \cos u}$$

La opción del signo + o - depende del cuadrante en el que se encuentre  $u/2$ .

Imagen recuperada de file:///D:/precalculo\_matematicas\_para\_el\_calculo-1%20(1).pdf

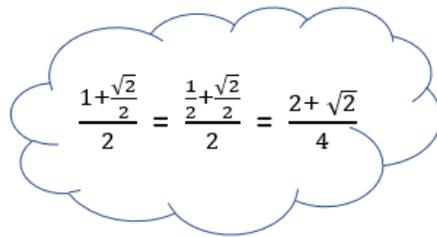
Usando la fórmula de **ángulo medio**.

Hallemos el valor de cos de  $22.5^\circ$ . Recordemos que podemos buscar el valor del cos de  $45^\circ$  y que 2 veces  $22.5^\circ = 45^\circ$ . Por lo tanto  $\cos 22.5^\circ = \dots$

$$\cos \frac{u}{2} = \pm \sqrt{\frac{1+\cos u}{2}} \quad \text{Usamos la fórmula de mitad de ángulo para cos}$$

$$\cos \frac{45}{2} = \pm \sqrt{\frac{1+\cos 45}{2}} \quad \text{Sustituimos por los valores de la función para el ángulo}$$

$$\cos \frac{45}{2} = \pm \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$$


$$\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos \frac{45}{2} = \pm \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} \quad \text{Simplificamos}$$

$$\cos \frac{45}{2} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

Ahora vamos a hacer una prueba para el valor de tan de  $30^\circ$ .

$$\tan \frac{30}{2} = \pm \sqrt{\frac{1-\cos 30}{1+\cos 30}} \quad \text{Sustituimos por los valores de la función para el ángulo}$$

$$\tan \frac{45}{2} = \pm \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}} \quad \text{Simplificamos y hallamos el Común denominador}$$

$$\frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

$$\tan \frac{45}{2} = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$$

Recordemos división de fracciones  $\frac{1}{2} \div \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$  entonces...

$$\tan \frac{45}{2} = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$$

Racionalizamos el denominador  $\frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\tan \frac{45}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

**Demuestra el procedimiento para hallar tu respuesta y explica en oraciones completas cuando la pregunte lo amerite.**

1) ¿Cuál NO es una identidad?

- a)  $1 + \cos^2\theta = \sin^2\theta$
- b)  $\csc^2\theta - 1 = \cot^2\theta$
- c)  $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$
- d)  $1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$

2) Evalúe  $\cos \frac{\pi}{3} + 2 \sin \frac{\pi}{6}$

3) Use la fórmula de mitad de ángulo para evaluar  $\cos 15^\circ$

4) Use la fórmula de mitad de ángulo para evaluar  $\sin 105^\circ$

5) Verifique la identidad demostrando que  $\frac{\cos x \sec x}{\tan x} = \cot x$

6) Simplifique  $\sin u + \cot u \cos u$

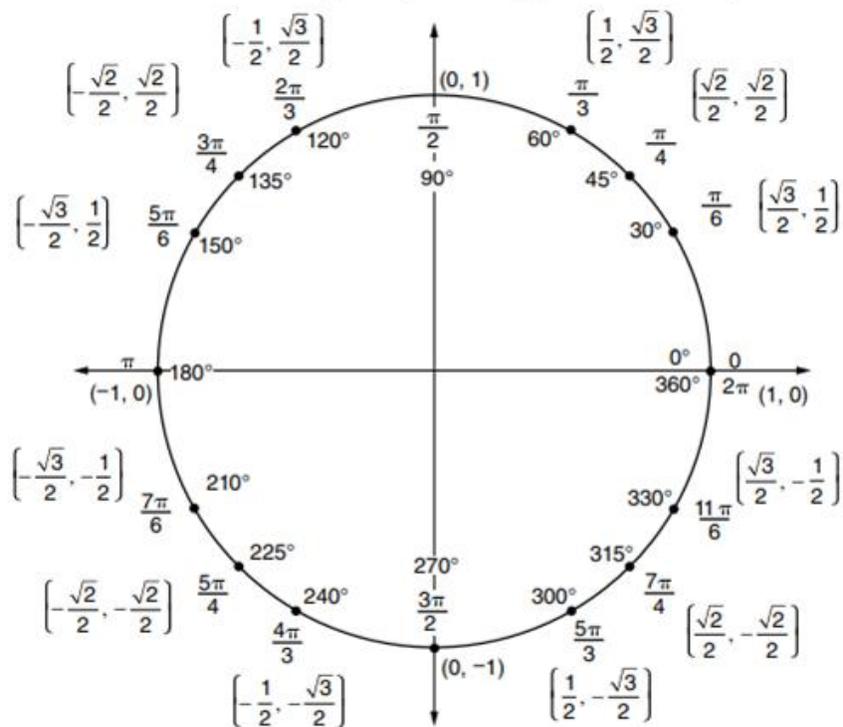
7) Verifique la identidad demostrando que  $\cos \theta(\sec \theta - \cos \theta) = \sin^2\theta$

8) Usando la fórmula de ángulo doble halla el valor de  $\cos 120^\circ$

9) Simplifique  $\frac{\operatorname{sen} x \operatorname{sec} x}{\tan x}$

10) Use la fórmula de la adición y diferencia para hallar el valor de  $\cos 75^\circ$

Medidas del círculo unitario en grados y radianes, y valores del seno y del coseno



## Referencias

- [ElShowDelNerd]. (2017, abril 1). Grafica de la función coseno. [Archivo de Video]. Recuperado de <https://youtu.be/kdBYhd2kESs>
- [ElShowDelNerd]. (2017, abril 1). Grafica de la función seno. [Archivo de Video]. Recuperado de <https://youtu.be/-LWlvsSdpjg>
- [khanAcademyEspañol]. (2013). Ejemplo: amplitud y periodo. [ Archivo de Video]. Recuperado de <https://youtu.be/Q2nutzqgbOk>
- [khanAcademyEspañol]. (2016). Funciones periódicas:¿Seno o Coseno? [ Archivo de Video]. Recuperado de <https://youtu.be/Q2nutzqgbOk>
- [Pi- ensa Matematik]. (2016, octubre 31). Función seno y coseno | Función par - Problema tipo. Universidad Nacional de Colombia. [Archivo de video]. Recuperado de <https://www.youtube.com/watch?v=YCoxI7XpYLQ>
- Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2012). 6.1 Trigonometría Analítica. En Precálculo Matemáticas para el Cálculo (6th ed., pp. 493–513).