MÓDULO DIDÁCTICO DE GEOMETRÍA
NOVENO GRADO

agosto 2020

DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN
GOBIERNO DE PUERTO RICO

Página web: https://de.pr.gov/ ꕤ Twitter: @educacionpr

CONTENIDO

LISTA DE COLABORADORES

Prof.ª Aileen J. Vélez Torres
Maestra de Matemáticas
Escuela especializada en Ciencias y Matemáticas Genaro Cautiño
ORE de Caguas
Municipio de Guayama

Prof.ª Isamalia Muñiz Nieves
Escuela Juan J. Osuna
Caguas II
ORE de Caguas

Dra. Wanda I. Rivera Rivas
Directora Programa de Matemáticas
Departamento de Educación de Puerto Rico

CARTA PARA EL ESTUDIANTE

Estimado estudiante:

Este módulo didáctico es un documento que favorece tu proceso de aprendizaje. Además, permite que aprendas en forma más efectiva e independiente, es decir, sin la necesidad de que dependas de la clase presencial o a distancia en todo momento. Del mismo modo, contiene todos los elementos necesarios para el aprendizaje de los conceptos claves y las destrezas de la clase de Geometría, sin el apoyo constante de tu maestro. Su contenido ha sido elaborado por maestros, facilitadores docentes y directores de los programas académicos del Departamento de Educación de Puerto Rico (DEPR) para apoyar tu desarrollo académico e integral en estos tiempos extraordinarios en que vivimos.

Te invito a que inicies y completes este módulo didáctico siguiendo el calendario de progreso establecido por semana. En él, podrás repasar conocimientos, refinar habilidades y aprender cosas nuevas sobre la clase de Geometría por medio de definiciones, ejemplos, lecturas, ejercicios de práctica y de evaluación. Además, te sugiere recursos disponibles en la internet, para que amplíes tu aprendizaje. Recuerda que esta experiencia de aprendizaje es fundamental en tu desarrollo académico y personal, así que comienza ya.

Estimada familia:

El Departamento de Educación de Puerto Rico (DEPR) comprometido con la educación de nuestros estudiantes, ha diseñado este módulo didáctico con la colaboración de: maestros, facilitadores docentes y directores de los programas académicos. Su propósito es proveer el contenido académico de la materia de Geometría para las primeras diez semanas del nuevo año escolar. Además, para desarrollar, reforzar y evaluar el dominio de conceptos y destrezas claves. Esta es una de las alternativas que promueve el DEPR para desarrollar los conocimientos de nuestros estudiantes, tus hijos, para así mejorar el aprovechamiento académico de estos.

Está probado que cuando las familias se involucran en la educación de sus hijos mejoran los resultados de su aprendizaje. Por esto, te invitamos a que apoyes el desarrollo académico e integral de tus hijos utilizando este módulo para apoyar su aprendizaje. Es fundamental que tu hijo avance en este módulo siguiendo el calendario de progreso establecido por semana.

El personal del DEPR reconoce que estarán realmente ansiosos ante las nuevas modalidades de enseñanza y que desean que sus hijos lo hagan muy bien. Le solicitamos a las familias que brinden una colaboración directa y activa en el proceso de enseñanza y aprendizaje de sus hijos. En estos tiempos extraordinarios en que vivimos, les recordamos que es importante que desarrolles la confianza, el sentido de logro y la independencia de tu hijo al realizar las tareas escolares. No olvides que las necesidades educativas de nuestros niños y jóvenes es responsabilidad de todos.

Estimados maestros:

El Departamento de Educación de Puerto Rico (DEPR) comprometido con la educación de nuestros estudiantes, ha diseñado este módulo didáctico con la colaboración de: maestros, facilitadores docentes y directores de los programas académicos. Este constituye un recurso útil y necesario para promover un proceso de enseñanza y aprendizaje innovador que permita favorecer el desarrollo holístico e integral de nuestros estudiantes al máximo de sus capacidades. Además, es una de las alternativas que se proveen para desarrollar los conocimientos claves en los estudiantes del DEPR; ante las situaciones de emergencia por fuerza mayor que enfrenta nuestro país.

El propósito del módulo es proveer el contenido de la materia de Geometría para las primeras diez semanas del nuevo año escolar. Es una herramienta de trabajo que les ayudará a desarrollar conceptos y destrezas en los estudiantes para mejorar su aprovechamiento académico. Al seleccionar esta alternativa de enseñanza, deberás velar que los estudiantes avancen en el módulo siguiendo el calendario de progreso establecido por semana. Es importante promover el desarrollo pleno de estos, proveyéndole herramientas que puedan apoyar su aprendizaje. Por lo que, deben diversificar los ofrecimientos con alternativas creativas de aprendizaje y evaluación de tu propia creación para reducir de manera significativa las brechas en el aprovechamiento académico.

El personal del DEPR espera que este módulo les pueda ayudar a lograr que los estudiantes progresen significativamente en su aprovechamiento académico. Esperamos que esta iniciativa les pueda ayudar a desarrollar al máximo las capacidades de nuestros estudiantes.

CALENDARIO DE PROGRESO EN EL MÓDULO

DÍAS / SEMANAS	LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES
1	Lección 1	Lección 1	Lección 1	Lección 1	Lección 1
2	Evaluación 1	Lección 2	Lección 2	Lección 2	Lección 2
3	Lección 2	Evaluación 2	Lección 3	Lección 3	Lección 3
4	Lección 3	Lección 3	Lección 3	Evaluación 3	Lección 4
5	Lección 4	Lección 4	Lección 4	Lección 4	Lección 4
6	Lección 5	Lección 5	Lección 5	Lección 5	Lección 5
7	Lección 5	Actividades y tareas de desempeño	Actividades y tareas de desempeño	Lección 6	Lección 6
8	Lección 6	Lección 6	Lección 6	Lección 6	Evaluación 4
9	Lección 7	Lección 7	Lección 7	Lección 7	Ejercicios
10	Lección 8	Lección 8	Lección 8	Lección 8	Evaluación 5

Lección 1. Conceptos Básicos de Geometría

Objetivos:

- **Nombrar y reconocer los conceptos básicos de la Geometría**
- **Dibujar intersecciones de las líneas y los planos**
- **Resolver problemas de la vida real**

1.1 Historia y conceptos de la Geometría

La geometría como palabra tiene dos raíces griegas: geo = tierra y metrón = medida; o sea, significa "medida de la tierra". trata de las propiedades de las figuras geométricas empleadas para la medición de extensiones. Su origen, unos tres mil años antes de Cristo, se remonta al Medio Oriente, en particular al Antiguo Egipto, en que se necesitaba medir predios agrarios y en la construcción de pirámides y monumentos. Esta concepción geométrica se aceptaba sin demostración, era

Pirámides egipcias

Thales de Mileto

Estos conocimientos pasaron a los griegos y fue Thales de Mileto quien hace unos 6 siglos antes de Cristo inició la geometría demostrativa. Las propiedades se demuestran por medio de razonamientos y no porque resulten en la práctica. Las demostraciones pasan a ser fundamentales y son la base de la Lógica como leyes del razonamiento.

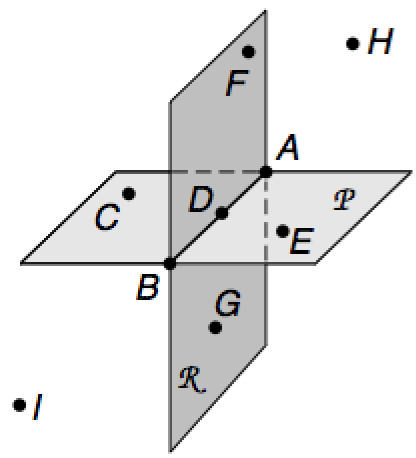
Euclides fue otro gran matemático griego, del siglo III antes de Cristo, quien en su famosa obra titulada

"Los Elementos", recopila, ordena y sistematiza todos los conocimientos de geometría hasta su época y, salvo algunas pequeñas variaciones, son los mismos conocimientos que se siguen enseñando en nuestros días.

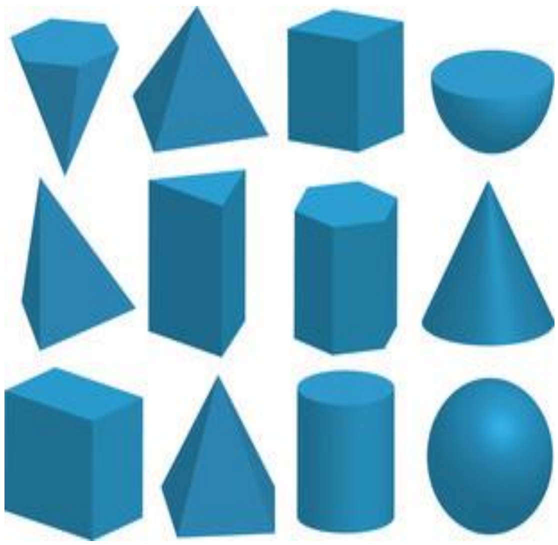
Euclides

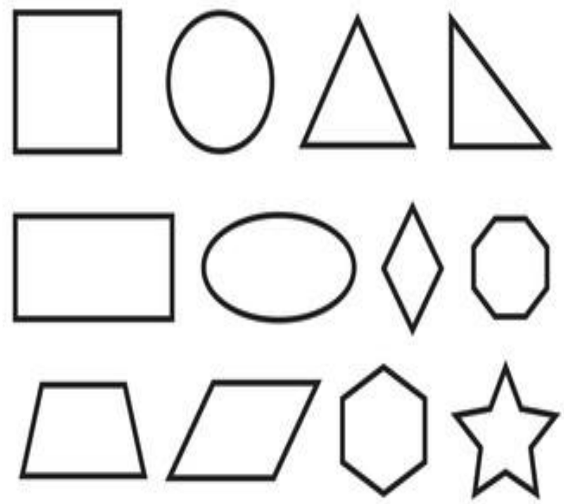
Euclides, usando un razonamiento deductivo, parte de conceptos básicos primarios no demostrables tales como: punto, recta, plano y espacio, que son el punto de partida para definir otras figuras y construir postulados y teoremas.

La geometría que estaremos presentando y estudiando en este módulo se conoce como Geometría Euclidiana, en honor a Euclides. Euclides fue un matemático que vivió en la Antigua Grecia. Él desarrolló la Geometría Euclidiana, la cual se refiere al estudio de las magnitudes y las características de las figuras que se encuentran en el espacio o en el plano.



Los conceptos básicos primarios punto, recta, plano y espacio no se definen, sino que se captan a través de los sentidos. Pueden darse modelos físicos para cada uno de ellos. Por ejemplo, un punto puede estar representado por la huella que deja sobre un papel la presión de la punta de un alfiler o por una estrella en el firmamento. Una recta está sugerida por un hilo a plomo, un plano está sugerido por la superficie de un lago quieto o bien por la superficie de un espejo. El espacio euclidiano puede considerarse constituido por todos los puntos existentes, o sea, el espacio en que nos movemos.
La geometría euclidiana puede dividirse en dos clases: geometría del espacio, la cual contiene las figuras sólidas o sólidos geométricos, y la geometría plana, la cual contiene a las figuras planas.



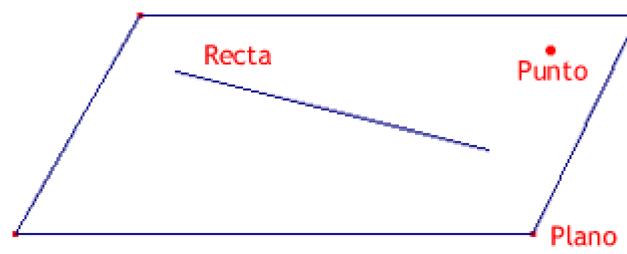


Sólidos geométricos **Figuras planas**

Existen otras geometrías que no aceptan dicho postulado euclidiano, sino que aceptan otros principios que dan origen a las llamadas "geometrías no euclidianas", como la creada en el siglo XIX por el ruso Lobatschevsky.

El punto, la recta, el segmento y el plano

Las figuras geométricas elementales son el punto, la recta, el segmento, el plano. Estas figuras son conceptos básicos de la geometría. Cada uno son una abstracción mental basada en la experiencia humana en el mundo real. Por tanto, no pueden definirse propiamente, sino que se describen y se utilizan entre sí para realizar estas descripciones.



Una estrella en el cielo nocturno sugiere la idea del **punto**. Los puntos no tienen medidas ni extensión y mayormente se usa para indicar o localizar. Estos son representados por letras mayúsculas.

Observemos:

Se presentan cuatro puntos, el punto A, el punto B, el punto C y el punto D.

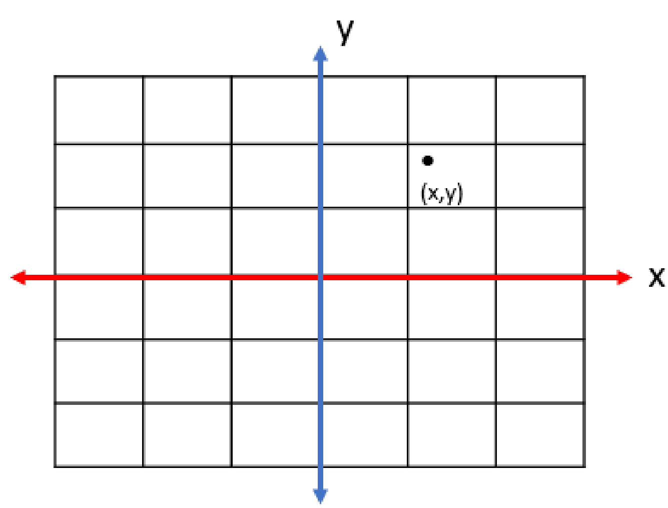
D●

A●

B●

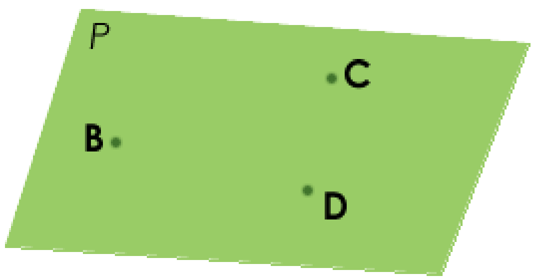
●C

Una de sus aplicaciones es representar un par ordenado en el plano cartesiano.



Una superficie llana como pista de aterrizaje sugiere la idea de un **plano.** Un plano se extiende al infinito en toda dirección y no tiene grosor alguno. Los planos se representan regularmente con una figura de cuatro lados. Se puede nombran un plano con una letra cursiva o griega (α, β, γ), o con tres puntos contenidos en el plano.

Ejemplo:



1. El siguiente plano se puede nombrar como:

Plano P

Plano CDB

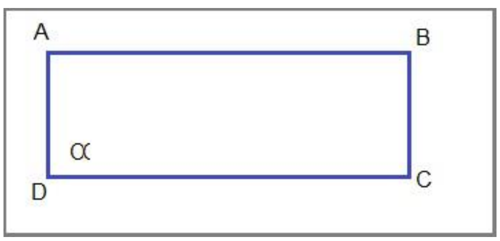
Plano DCB

Plano BDC

Plano BCD

Plano DBC

Plano CBD



2. El siguiente plano lo podemos nombrar como:

Plano α

Plano ABC

Plano BAD

Entre otras.

Plano ADC

Plano BDC

Plano CDA

Un alambre fino y derecho sugiere la idea de una **recta**. Una recta se extiende al infinito en ambas direcciones y carece de ancho. Esta se representa con el trazo de un lápiz y una punta de flecha en cada extremo. Las rectas se nombran con letras minúsculas si se usa una sola letra o con letras mayúsculas si se usan dos letras. Esto es si A y B son dos puntos en una recta, como se muestra en la imagen, la recta se puede llamar recta $\overleftrightarrow{AB}$ o recta *m*.

Segmento es la parte de una recta la cual tiene un punto inicial y uno final o, simplemente decimos que tiene dos extremos. Como tiene extremos, el segmento puede medirse.

Se nombran con las letras mayúsculas de los puntos inicial y final.

Ejemplo:

Se nombra como: $\overline{\boldsymbol{AB}}$ ***o*** $\overline{\boldsymbol{BA}}$

Otra de las figuras importantes en la Geometría es el rayo.

Rayo

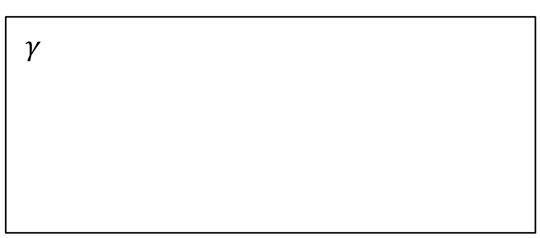
El rayo es una porción de la recta que tiene un punto inicial, pero no tiene un punto final. O sea, el rayo tiene un solo extremo. Se nombra con dos letras mayúsculas desde el punto inicial.

Ejemplo

Rayo FG o $\overrightarrow{FG}$

Demuestra tu conocimiento:

1. **¿Cuál término describe esta figura?**



a. Recta
b. Punto
c. Segmento
d. Plano

2. **¿Cuál de los siguientes es un segmento de recta?**

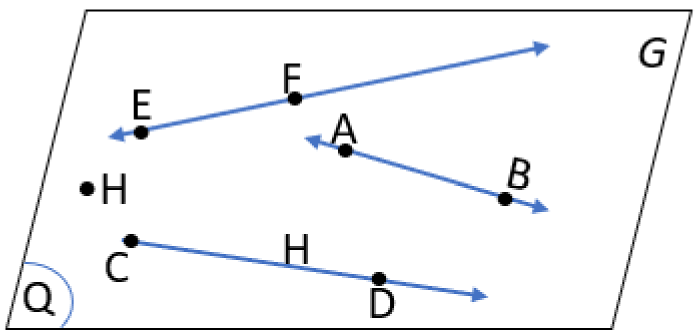
a. 

b.

c. 

d. 

3. **Utilizando la siguiente figura menciona dos de cada uno de los siguientes:**



Punto: ______________________, ______________________

Recta: ______________________, ______________________

Segmento: ______________________, ____________________

Plano: ______________________, ______________________

Evaluación 1   40 puntos

Parte I. Dibuja las siguientes figuras. 10 pts.

1. El punto W
2. El segmento JK
3. La recta PQ
4. El plano Z
5. El rayo CD

Parte II. Contesta Cierto o Falso. 10 pts.

___1. La recta tiene extremos.

___2. Un segmento puede medirse, ya que tiene dos extremos.

___3. Los puntos se nombran mayormente, con dos letras mayúsculas.

___4. Los conceptos básicos de la Geometría son: el punto, el rayo, los ángulos y los polígonos.

___5. El espacio está formado por todos los puntos que existen.

___6. La Geometría nace en Grecia, de ahí provienen los postulados y teoremas.

___7. La Geometría euclidiana se divide en dos; plana y espacial.

___8. Todos los tipos o ramas de la Geometría aceptan los postulados euclidianos, por eso se conocen como Geometrías Euclidianas.

___9. Un rayo tiene dos extremos, ya que forma parte de la recta.

___10. Thales de Mileto desarrolló una Geometría diferente a la de Euclides, pero n y estaba basada en la demostración y en el razonamiento.

Parte III. Pareo 10 pts.

___1. No tiene extremos	A. segmento
___2. Lugar donde nació Euclides	B. Euclides
___3. Geometría demostrativa	C. Figuras geométricas elementales
___4. Tiene dos extremos	D. rayo
___5. No pueden definirse propiamente	E. Egipto
___6. Geometría plana y espacial	F. plano
___7. Superficie llana, se extiende al infinito en todas direcciones	G. punto
___8. Tiene un solo extremo	H. recta
___9. Lugar donde nació la Geometría	I. Grecia
___10. No tiene medida ni extensión	J. Thales de Mileto

IV. Asocia cada objeto con una de las siguientes figuras básicas: punto, recta, segmento, rayo y plano. 10 pts.

1. La cabeza de un alfiler _________________
2. Una sábana _________________
3. La trayectoria de un cohete hacia el espacio _________________
4. Los carriles de la autopista _________________
5. Un botón de camisa _________________
6. La pared de tu cuarto _________________
7. Una regla para medir _________________
8. La Luna vista desde la Tierra _________________
9. El camino de la casa hasta la escuela _________________
10. La pizarra del salón de clase _________________

Unidad 9.1

Lección 2. Líneas paralelas y perpendiculares

Resumen de la Unidad- Esta unidad reúne muchos de los teoremas de geometría "clásicos". El estudiante participará en probar y construir teoremas de líneas paralelas y perpendiculares, triángulos y paralelogramos. Esta unidad tiene enfoque en la práctica matemática de hacer argumentos viables y la crítica del razonamiento de otros.

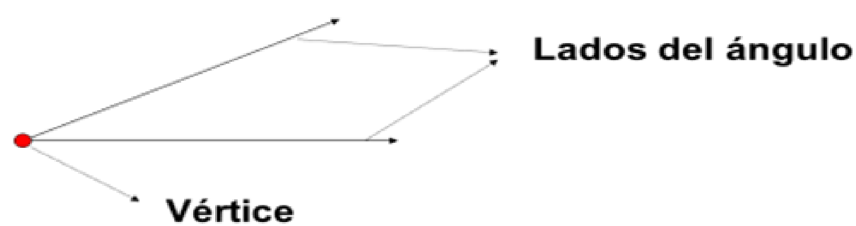
Objetivos de la unidad:

1. Identificar las coordenadas para comprobar teoremas geométricos simples.
2. Aplicar los conceptos geométricos en el modelado de construcciones geométricas.
3. Justificar los teoremas geométricos básicos de Euclides.
4. Evaluar las coordenadas para calcular el perímetro de los polígonos.
5. Evaluar las propiedades de los polígonos: triángulos y paralelogramos.

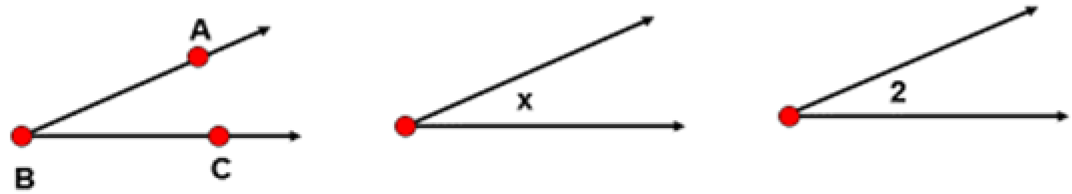
9.G.4.1 Demuestra teoremas sobre rectas y ángulos. Incluye los siguientes teoremas: los ángulos rectos son congruentes; cuando una transversal se corta por rectas paralelas, los ángulos internos alternos son congruentes, los ángulos correspondientes son congruentes; los puntos sobre una bisectriz perpendicular de un segmento de recta son exactamente equidistantes de los puntos extremos del segmento.

Definición:

- Un **ángulo** es la abertura formada por dos rayos o semi rectas (lados del ángulo) con un mismo punto inicial; al cuál se le llama vértice del ángulo.



- Los ángulos pueden ser representados de diferentes formas: usando tres letras mayúsculas (una en el vértice y las otras una en cada lado) o usando una letra minúscula o un número colocado en la abertura. (Observar la siguiente imagen)



Clasificación de los ángulos

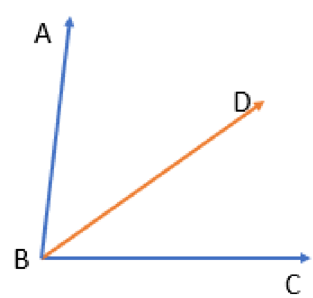
Los ángulos se clasifican de acuerdo con su medida y a su posición.

Por su medida

1. Ángulo agudo – Es un ángulo que mide menos que 90°. Si el ángulo es x, entonces $x < 90°$.
2. Ángulo recto – Este ángulo mide exactamente 90°, esto es $x = 90°$.
3. Ángulo obtuso – Es un ángulo que mide más que 90° y menos que 180°. O sea, $90° < x < 180°$.
4. Ángulo llano – Es un ángulo que mide exactamente 180°, esto es $x = 180°$.

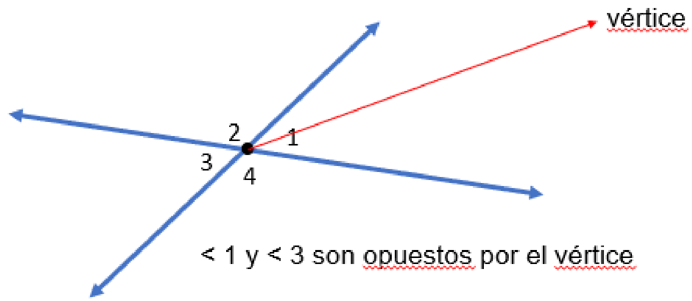
Por su posición

1. Ángulos adyacentes – Son dos ángulos que comparten el vértice y uno de los lados (son vecinos).
   Ejemplo:



<ABD y <DBC son adyacentes

2. Ángulos opuestos por el vértice – Son dos ángulos que lo único que comparten es el vértice.
   Ejemplo



Los ángulos opuestos por el vértice siempre miden lo mismo, son congruentes.

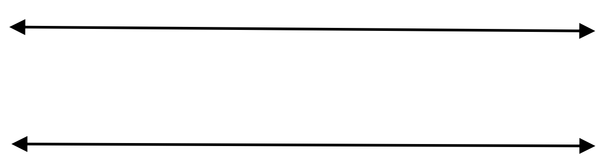
$$< 1 \cong < 3 \quad y \quad < 2 \cong < 4$$

$\cong$ *significa congruente*
(la misma medida)

Pares de ángulos especiales

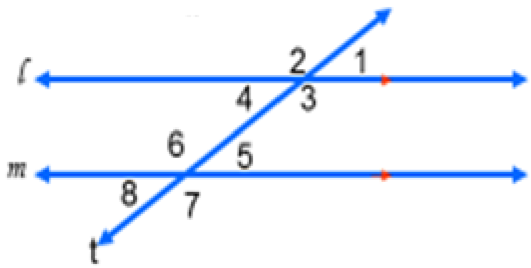
- **Las rectas paralelas** son dos o más rectas en un plano que nunca se intersecan. Hay muchos ejemplos de rectas paralelas como los lados opuestos del marco rectangular de una pintura y los estantes de un librero. En geometría el símbolo $\parallel$ significa paralelo a, y las flechas rojas se utilizan para indicar que las rectas son paralelas.

Ejemplo:



- En geometría también cuando dos rectas paralelas son intersecadas por una transversal se forman 8 ángulos especiales.

Ejemplo:



En la siguiente imagen vemos que las rectas $l\, y\, m$ son rectas paralelas intersecadas por la transversal t.

Los ocho ángulos especiales formados son:

- ∡1, ∡ 2, ∡8 y ∡7- son ángulos externos.
- ∡3, ∡ 4, ∡5y ∡6- son ángulos internos.
- ∡3 y ∡ 5, ∡4 y ∡6- son ángulos internos consecutivos
- ∡1 y ∡7, ∡2 y ∡8- son ángulos externos consecutivos.
- ∡3 y ∡ 6, ∡4 y ∡5- son ángulos alternos internos.
- ∡1 y ∡8, ∡2 y ∡7- son ángulos alternos externos.
- ∡1 y ∡5, ∡2 y ∡6,∡3 y ∡7, ∡4 y ∡8- son ángulos correspondientes.
- ∡1 y ∡4, ∡2 y ∡3,∡5 y ∡8, ∡6 y ∡7- son ángulos opuestos por el vértice.

Nota: a) los ángulos internos consecutivos son ángulos suplementarios (suman 180°)

b) los ángulos externos consecutivos son ángulos suplementarios (suman 180°)

c) los ángulos alternos internos, alternos externos, correspondientes y opuestos por el vértice son ángulos congruentes (que tienen las mismas medidas)

Ángulos complementarios

Los ángulos complementarios son **dos** ángulos que suman 90 grados.

Ejemplo: 35 + 55 = 90 el ángulo de 35 grados es el **complemento** del ángulo de

55 grados y el ángulo de 55 grados es el complemento del ángulo de 35 grados.

Ángulos suplementarios

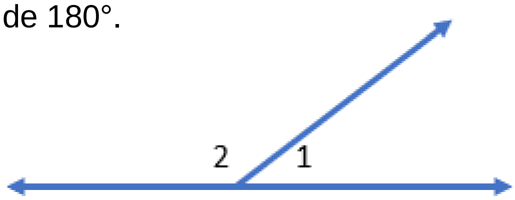
Los ángulos suplementarios son **dos** ángulos que suman 180 grados.

Ejemplo: 80 + 100 = 180 el ángulo de 80 grados es el suplemento del ángulo de 100 grados y el ángulo de 100 grados es el suplemento del ángulo de 80 grados.

Ángulos que forman un par lineal

Los ángulos que forman una línea recta se conocen como par lineal. Estos ángulos son suplementarios porque al unirse forman el ángulo de la recta que es un ángulo llano y mide 180°.

Ejemplo:



$< 1\ y\ < 2\ \ forman\ un\ par\ lineal$

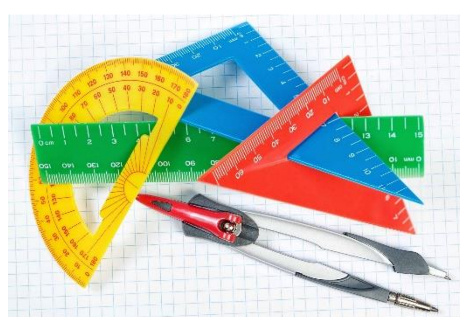
$\boldsymbol{m}$ significa medida

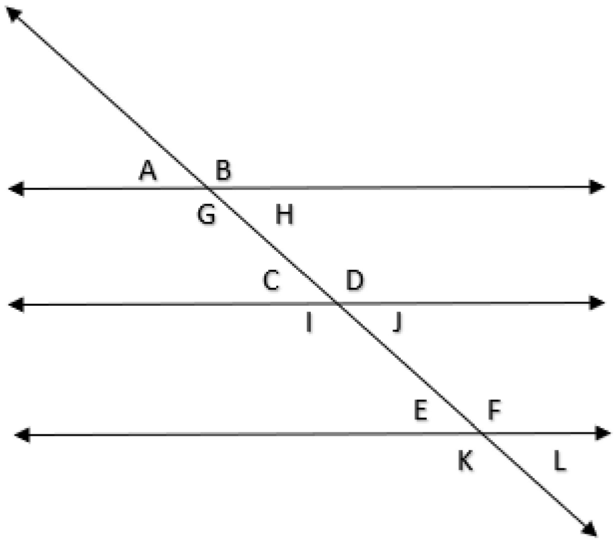
$$\boldsymbol{m < 1 + m < 2 = 180°}$$

Práctica:

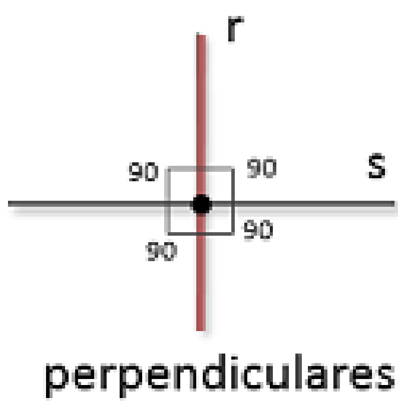
Refiérete a la siguiente figura para responder. Identifica cada par de ángulos según lo explicado anteriormente. Indica si son **ángulos internos, externos, alternos internos, alternos externos, correspondientes, consecutivos u opuestos por el vértice.**

a) ∡A y ∡ J
b) ∡ I y ∡ F
c) ∡ J y ∡ L
d) ∡ A y ∡ C
e) ∡ H y∡ D
f) ∡ J y ∡ E
g) ∡ B Y ∡ G



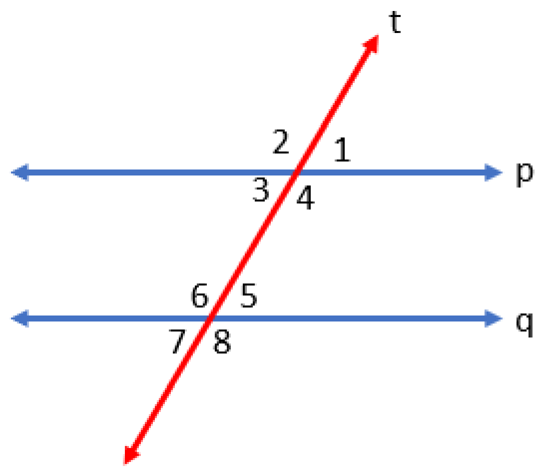


- **Las rectas perpendiculares** son dos o más rectas que se intersecan formando un ángulo de 90 grados, como las dos rectas dibujadas en la gráfica. Los ángulos de 90 grados también se llaman ángulos rectos. Las rectas perpendiculares también están en todos lados, no sólo en una gráfica en papel sino en el mundo real, desde el patrón de cruce en las calles a la intersección de las líneas coloreadas de una camisa a cuadros.



Evaluación 2. 60 puntos

Parte I. Observa la siguiente figura y contesta. Dada la recta t transversal y las rectas p y q paralelas. 10 pts

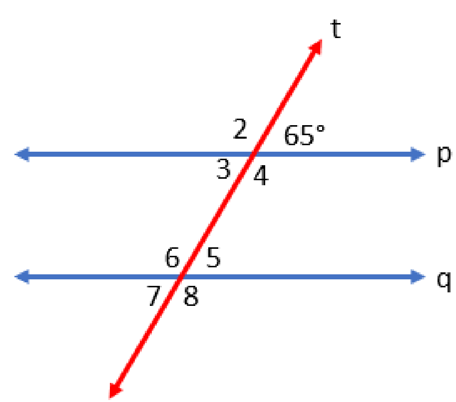


1. Menciona dos pares de ángulos opuestos por el vértice.
2. Dos pares de ángulos alternos internos.
3. Dos pares de ángulos correspondientes.
4. Un par de ángulos alternos externos.
5. Un par de ángulos internos consecutivos.
6. Un par de ángulos externos consecutivos.
7. Un par de ángulos suplementarios.

Parte II. Resuelve

1. En la siguiente figura las rectas p y q son paralelas y t es una recta transversal, determina los siguiente: 7 pts.

La medida de los ángulos:



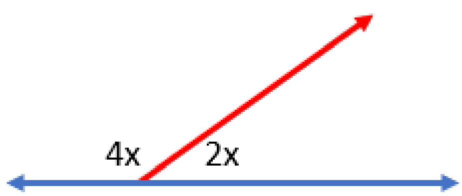
a) 2 _____
b) 3 _____
c) 4 _____
d) 5 _____
e) 6 _____
f) 7 _____
g) 8 _____

2. Completa la siguiente tabla. 23 pts.

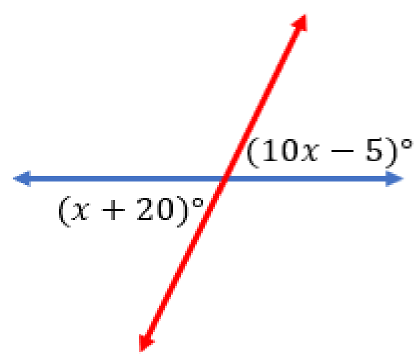
Ángulo	Complemento	Suplemento
45°		135°
	50°	
	40°	
		120°
83°		
	72°	
		100°
	65°	
		110°
15°		
	60°	120°

3. Resuelve. Halla el valor de x, luego determina la medida de cada par de ángulos indicados. 20 pts.

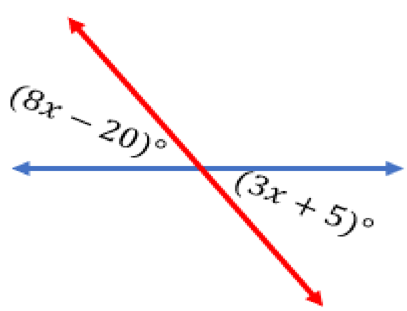
a)



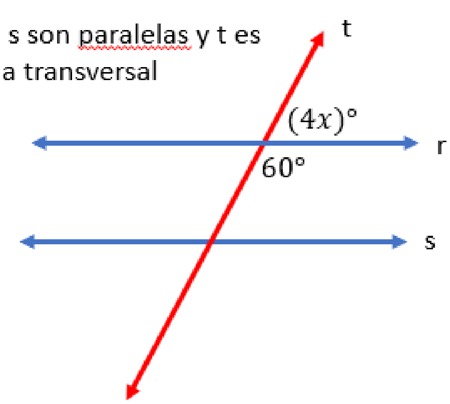
c)



b)



d) r y s son paralelas y t es una transversal



Lección 3. Teoremas sobre triángulos

9.G.4.2 Demuestra teoremas sobre triángulos. Incluye los siguientes teoremas: la suma de los ángulos interiores de un triángulo es de 180°; los ángulos de la base de un triángulo isósceles son congruentes; el segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y su longitud es la mitad de ese lado; las medianas de un triángulo se encuentran en un punto.

Encontrar ángulo faltante

Como la suma de ángulos internos de un triángulo es siempre 180 podemos utilizar una ecuación para encontrar la medida del ángulo faltante.

Ejemplo:

Encuentra el valor de *x* en el triángulo que se muestra a continuación.

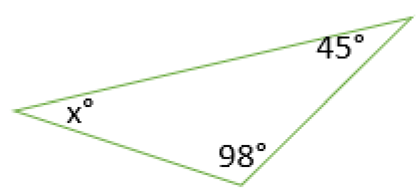
Sabemos, que la medida de los tres ángulos de un triángulo es 180, entonces tenemos: $x + 45° + 98° = 180°$ resolvemos para x.

$x + 45° + 98° = 180°$

$x + 143° = 180°$

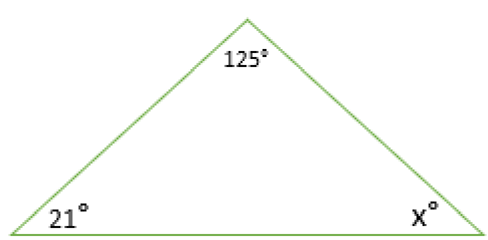
$x = 180° - 143°$

$x = 37°$



Ejercicio de práctica

Encuentra el valor de x.

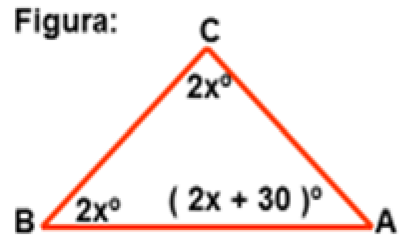


Respuesta

34°

Encuentra la medida de los ángulos, usando el terorema que justifica.

Entonces:



a) $m\angle B + m\angle A + m\angle C = 180°$

$2x° + (2x + 30)° + 2x° = 180°$

$4x° + 2x + 30° = 180°$

$6x° + 30° = 180°$

$6x° + 30° - 30° = 180° - 30°$

$6x° = 150°$

$\frac{6x°}{6} = \frac{150°}{6}$

$\boxed{x = 25°}$

Por tanto:

b) m∡B = 2xº

m∡B = 2(25º)

m∡B = 50°

también…

c) m ∡A= (2x +30)º

m ∡A= (2(25) +30)º

m ∡A= (50 +30)º

m ∡A= 80º

y…

d) m∡C = 2xº

m∡B = 2(25º)

m∡B = 50°

¿Qué relación hay entre las medidas de los ángulos de un triángulo?

En la geometría dinámica puedes dibujar cualquier triángulo y lo rotulas como $\triangle ABC$.

Halla las medidas de los ángulos interiores del triángulo.

Halla la suma de las medidas de los ángulos interiores del triángulo.

Haz una conjetura acerca de la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo.

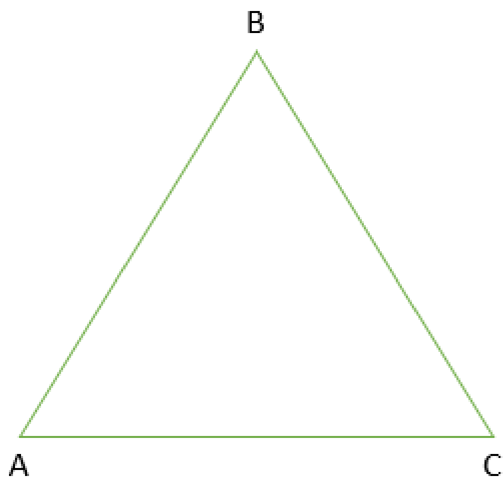
Muestra

Ángulos

m<A=43.67

m<B=81.87

m<C=54.46

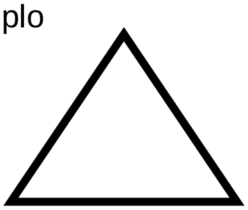


Triángulos

Definición:

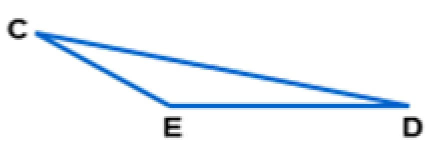
1. Un triángulo es un polígono de tres lados

   Ejemplo



2. Un polígono es una figura cerrada en un plano formada por segmentos llamados lados que se intersecan solamente en sus extremos llamados vértices

   Ejemplo



Leyenda:

Lados: $\overline{CD}, \overline{DE}, \overline{CE}$

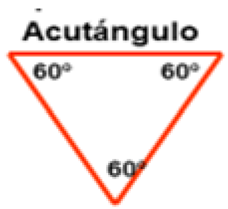
Vértices: C, D, E

ángulos: $\measuredangle C$ o $\measuredangle ECD$, $\measuredangle E$ o $\measuredangle CED$, $\measuredangle D$ o $\measuredangle CDE$

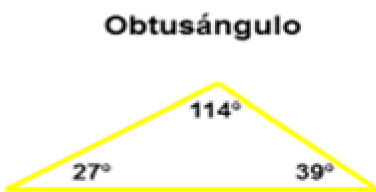
Una forma de clasificar los triángulos $\Delta's$ es por la medidas de sus ángulos.

Todos los triangulos tienen por los menos 2 ángulos agudos, pero el tercer ángulo el cual se usa para clasificar al triángulo puede ser agudo, obtuso o recto.

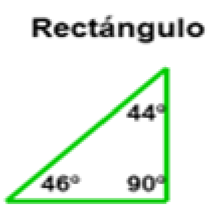
Ejemplos



Todos los ángulos son agudos. Es este un triángulo acutángulo en donde todos los ángulos son congruentes lo clasificamos como equiángulo.

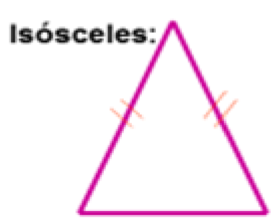


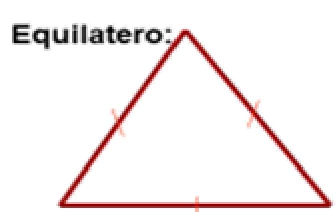
Uno de sus ángulos es obtuso.



Un ángulo es recto o 90º. El lado opuesto al ángulo recto se llama la hipotenusa. Los lados que forman al ángulo de 90º se le llaman catetos.

Los triángulos también pueden clasificarse de acuerdo con el número de lados congruentes que posea. Un número igual de guiones sobre los lados del triángulo indica que esos lados del triángulo son los congruentes.



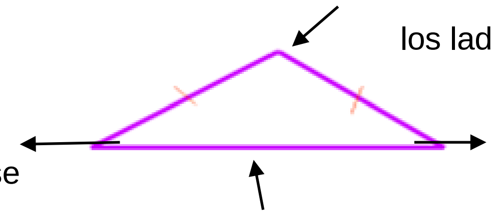


No existen lados congruentes

dos lados son congruentes

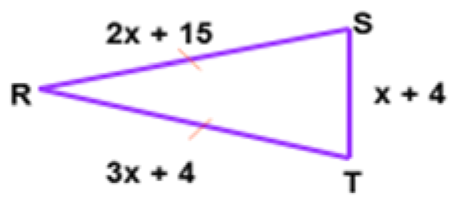
todos sus lados son congruentes

Partes de un triángulo isósceles:



Los ángulos de la base son ángulos congruentes (tienen la misma medida)

Figura:



Ejemplo:

El ΔRST es un triángulo isósceles

∡R es el ángulo del vértice; $\overline{RT} = 3x + 4$; $\overline{ST} = x + 4$; $\overline{RS} = 2x + 15$

Encuentra $x, \overline{RT}, \overline{ST}\ y\ \overline{RS}$

Entonces:

Como ∡R es el ángulo del vértice, el lado opuesto a ∡R es $\overline{ST}$ que es la base del triángulo, los lados congruentes del triángulo son $\overline{RT}\ y\ \overline{RS}$.

Por tanto…	y…	además…	finalmente...
$\overline{RT} = \overline{RS}$	$\overline{RS} = 2x + 15$	$\overline{RT} = 3x + 4$	$\overline{ST} = x + 4$
$3x + 4 = 2x + 15$	$\overline{RS} = 2(11) + 15$	$\overline{RT} = 3(11) + 4$	$\overline{ST} = 11 + 4$
$3x - 2x = 15 - 4$	$\overline{RS} = 22 + 15$	$\overline{RT} = 33 + 4$	$\boxed{\overline{ST} = 15}$
$\boxed{x = 11}$	$\boxed{\overline{RS} = 37}$	$\boxed{\overline{RT} = 37}$	

Teorema: Si dos ángulos de un triángulo son congruentes, entonces los lados opuestos de esos ángulos son congruentes.

Teorema: Si dos lados de un triángulo son congruentes, entonces los ángulos opuestos a esos lados son congruentes.

Entonces:

Si en el triángulo isósceles ΔISO con base $\overline{SO}$ y m$\measuredangle S = 4x - 20$, m$\measuredangle O = 2x + 20$, encuentra la medida de cada ángulo del triángulo.

a) $m\measuredangle S = m\measuredangle O$

$4x - 20 = 2x + 20$

$4x - 2x = 20 + 20$

$2x = 40$

$x = 20$

b) $m\measuredangle S = 4x - 20$

$m\measuredangle S = 4(20) - 20$

$m\measuredangle S = 80 - 20$

$m\measuredangle S = 60°$

c) $m\measuredangle O = 2x + 20$

$m\measuredangle O = 2(20) + 20$

$m\measuredangle O = 40 + 20$

$m\measuredangle O = 60°$

d) $m\measuredangle S + m\measuredangle O + m\measuredangle I = 180°$

$60° + 60° + m\measuredangle I = 180°$

$120° + m\measuredangle I = 180°$

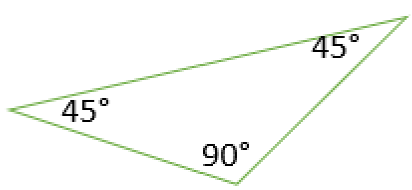
$m\measuredangle I = 180° - 120°$

$m\measuredangle I = 60°$

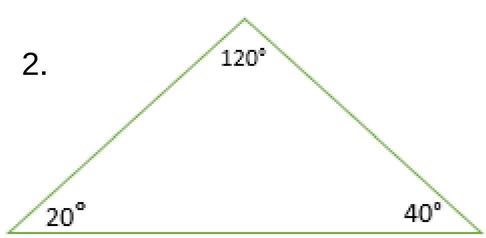
Evaluación 3 56 puntos

Parte I. A. Clasifica los siguientes triángulos, según la medida de sus ángulos. 3 pts

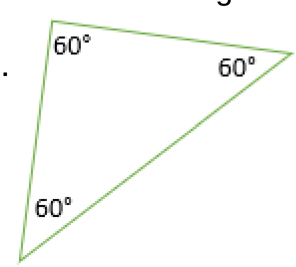
1.



2.

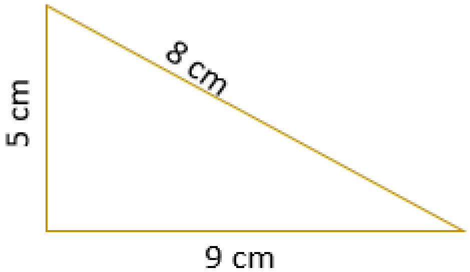


3.

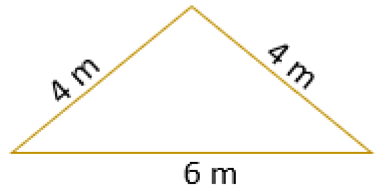


B. Clasifica los siguientes tringulos, segn la medida de los lados. 3 pts.

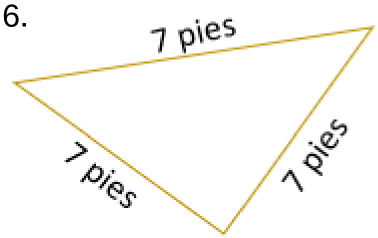
4.



5.

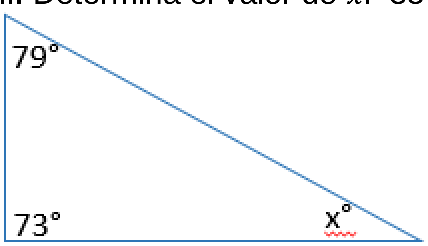


6.

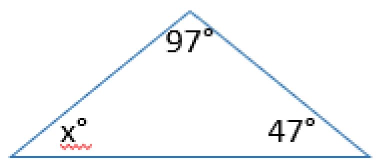


Parte II. Determina el valor de x. 35 pts.

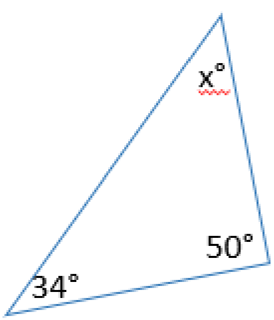
1.



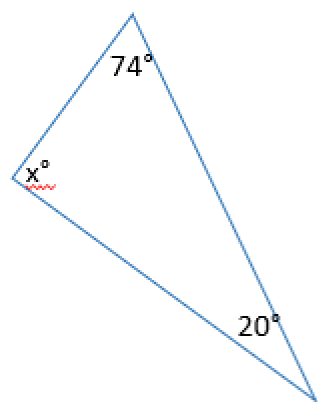
2.



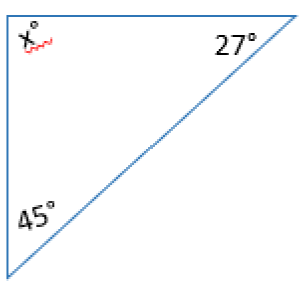
3.



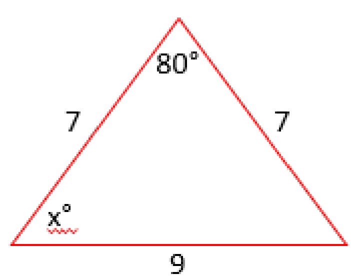
4.



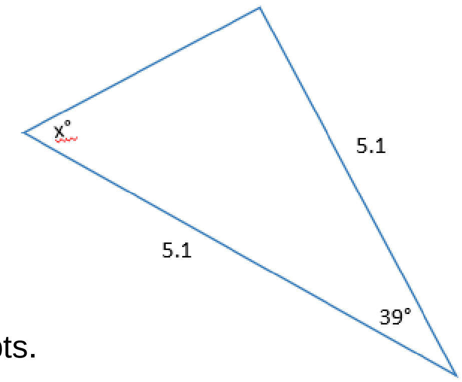
5.



6.



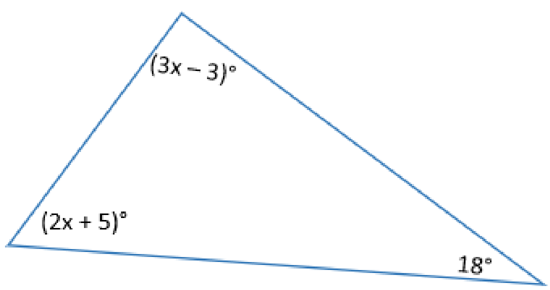
7.



Parte III. Resuelve 10 pts.

1. La medida del ángulo mayor de un tringulo es 4 veces la medida del segundo ángulo mayor. El ángulo menor es de 10°. ¿Cuáles son las medidas de los tres ángulos? Presenta el procedimiento.

2. Encuentra la medida de cada uno de los ángulos en el siguiente triángulo.



Escoge la contestación correcta. 5 pts.

3. Un ángulo de un triángulo mide 35° y otro mide 83°, ¿cuánto mide el tercer ángulo?

   a. 62° b. 242° c. 52° d. 118°

4. El triángulo del ejercicio anterior es _______.

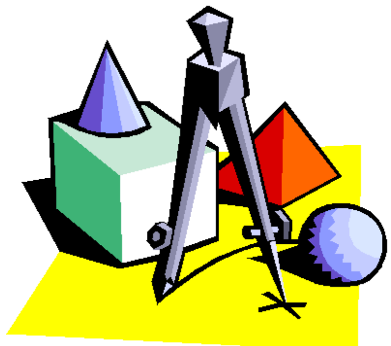
   a. acutángulo b. obtusángulo c. rectángulo d. equiángulo

5. Un triángulo isósceles cuyos ángulos iguales miden 45° cada uno es un triángulo ________.

   a. obtusángulo b. rectángulo c. acutángulo d. equiángulo

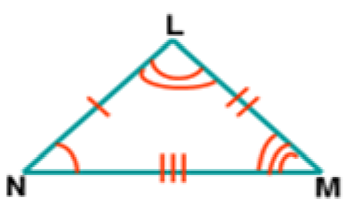
6. No es posible que un triángulo sea….
    a. obtusángulo e isósceles
    b. obtusángulo y equilátero
    c. obtusángulo y escaleno
    de. rectángulo e isósceles

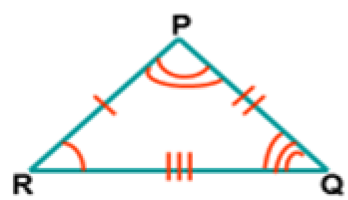
7. Un triángulo equilátero siempre es____________.
    a. obtusángulo
    b. acutángulo
    c. rectángulo
    d. isósceles



Lección 4. Triángulos congruentes

Dado:





Si el triángulo ΔLMN es congruente al triángulo ΔPQR, los vértices de los dos triángulos se corresponden en el mismo orden como las letras nombran a los dos triángulos.

O sea: $\longleftrightarrow$ significa "corresponde"

$$\measuredangle L \longleftrightarrow \measuredangle P \qquad \measuredangle M \leftrightarrow \measuredangle Q \qquad \measuredangle N \leftrightarrow \measuredangle R$$

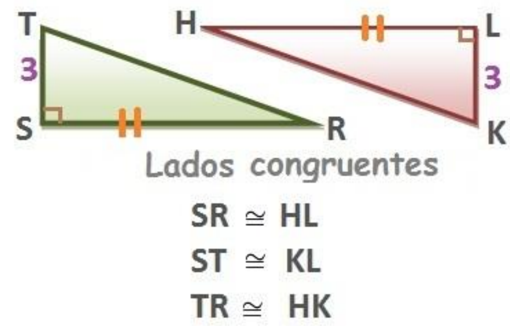
De la misma manera

$\measuredangle L \cong \measuredangle P$ $\qquad$ $\measuredangle M \cong \measuredangle P$ $\qquad$ $\measuredangle N \cong \measuredangle R$ $\qquad$ $(\cong significa\ congruente)$

También

$\overline{LM} \cong \overline{PQ}$ $\qquad$ $\overline{MN} \cong \overline{QR}$ $\qquad$ $\overline{LN} \cong \overline{PR}$

Es importante listar las letras de los vértices en el orden correcto.

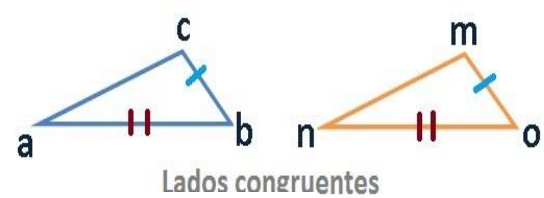


Para que un triángulo sea congruente debe tener la misma medidas y forma. Van a contar también con ángulos, vértices y lados correspondientes que quiere decir que se encuentran en la misma posición.

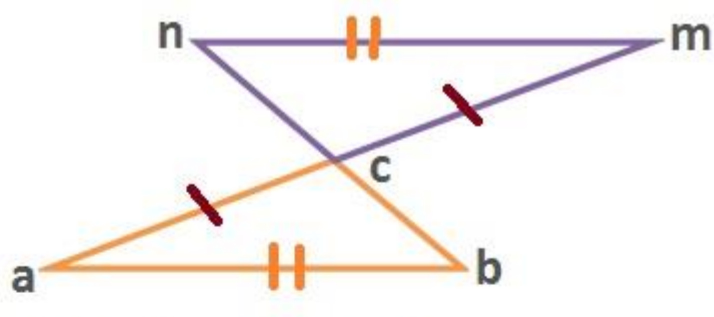
Los **ángulos correspondientes** se encuentran en la misma posición con respecto al otro triángulo y son los siguientes: **“a”** y **“n”**; **“b”** y **“o”**; **“c”** y **“m”**. Las dos líneas rojas indican que tanto el lado **«ab»** y **«no»** son congruentes o sea que miden lo mismo, por tanto, las líneas azules indican que esos lados también son congruentes.

Los siguientes son triángulos rectángulos y hay que tener presente que estos siempre forman un ángulo recto que va a medir 90 grados.

Los ángulos **S** y **L** forman una perpendicular y nos indica que su ángulo mide **90°**. Si el ángulo **“T”** mide **58**°, podemos obtener la medida de los otros ángulos. **“T”** es correspondiente a **“K”** por tanto, también mide **58°.**



Práctica: Contesta las preguntas de acuerdo con la siguiente figura.



1. ¿Cuáles lados son congruentes?
2. Si el ángulo b= 55°, ¿Qué otro ángulo mide lo mismo?
3. ¿Qué ángulo es correspondiente a “m”?
4. Si los ángulos opuestos a su vértice miden 80°. ¿Cuál es la medida de los ángulos restantes?

Respuestas:
1. nm y ab; bc y cn; ac y cm
2. < n
3. <a
4. <a y <m miden 45 grados

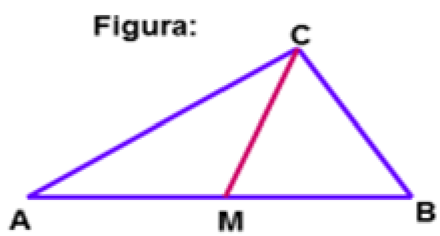
Video sobre triángulos congruentes en https://www.youtube.com/watch?v=nEEEEKAOao4

Lección 5. Segmentos Especiales

Ejemplo:

Mediana:

Es un segmento que une un vértice de un Δ con el punto medio del lado opuesto a ese vértice.



Conclusión: $\overline{CM}$ es la mediana del ΔABC

M es el punto medio de $\overline{AB}$

Nota: Un ΔABC contiene tres medianas (mediana que parte del $\measuredangle C$ hasta $\overline{AB}$, mediana que parte el $\measuredangle B$ hasta $\overline{AC}$ y mediana que parte el $\measuredangle A$ hasta $\overline{BC}$)

9.G.4.3 Demuestra teoremas sobre paralelogramos. Incluye los siguientes teoremas: los lados opuestos son congruentes; los ángulos opuestos son congruentes; las diagonales de un paralelogramo se bisecan una a la otra y, a la inversa, los rectángulos son paralelogramos con diagonales congruentes.

Paralelogramo:

Es una figura de cuatro lados con ambos pares de lados opuestos paralelos (∥).

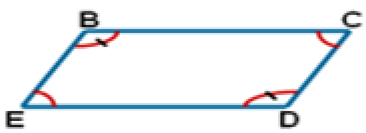
Ejemplo: Lados:

1) $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$
2) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$

Teorema: los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes (≡)

Teorema: los ángulos opuestos en un paralelogramo son (≡)

Ejemplo:

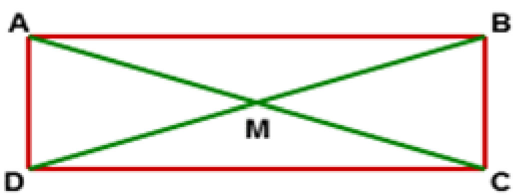


ángulos:

3) $\measuredangle B$ es opuesto al $\measuredangle D$. $\measuredangle B \equiv \measuredangle D$
4) $\measuredangle E$ es opuesto al $\measuredangle C$. $\measuredangle E \equiv \measuredangle C$

Teorema: Si un paralelogramo es un rectángulo, entonces sus diagonales son congruentes.

Ejemplo:



Entonces:

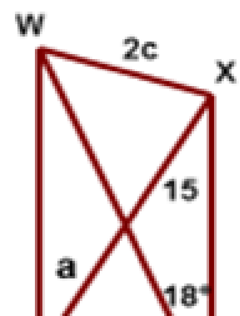
$\overline{AC} \equiv \overline{BD}$

$\overline{AM} \equiv \overline{MC}$

$\overline{DM} \equiv \overline{MB}$

Ejemplo 1:

Figura:



WXYZ es un paralelogramo, m$\measuredangle ZWX = b$ y m$\measuredangle WXY = d$. Encuentra los valores de a, b, c, d.

- Como las diagonales de un ▱ se bisecan mutuamente por tanto a= 15
- Los ángulos opuestos de un ▱ son congruentes.

Luego m$\measuredangle ZWX = \text{m}\measuredangle XYZ$

b= 31+18

b= 49

- Los lados opuestos de un ▱ son congruentes.

WX = ZY

2c=22

c=11

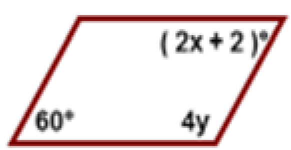
- Como los ángulos consecutivos de un ▱ son suplementarios (suman 180º) entonces:

$$m\measuredangle WXY + \text{m}\measuredangle XYZ = 180°$$
$$d + (31 + 18) = 180°$$
$$d + 49 = 180°$$
$$d = 131°$$

Ejemplo 2:

Dada las medidas de los ángulos del paralelogramo, encuentra los valores de x e y:

Figura:

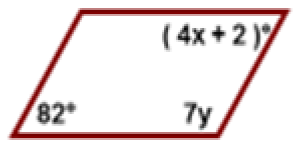


Como los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes:

Entonces…	y…
$2x + 2 = 60°$	$4y + 60 = 180°$
$2x = 60 - 2$	$4y = 180° - 60$
$2x = 58$	$4y = 120°$
$x = 29°$	$y = 30°$

Ejemplo 3:

Figura:



Como los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes:

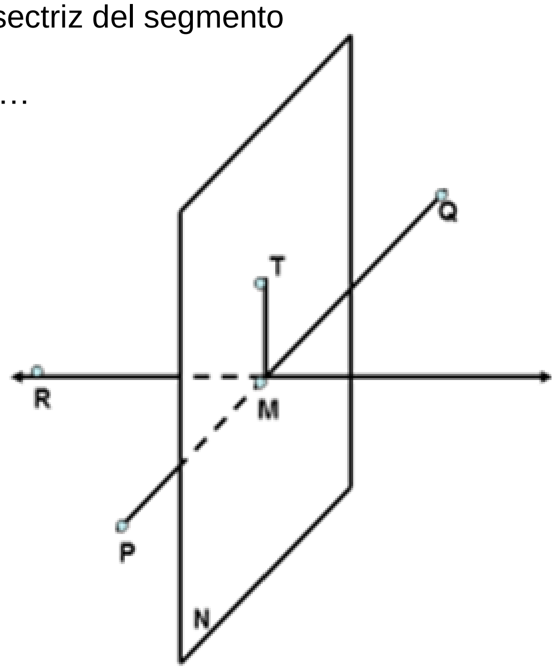
Entonces…	y…
$4x + 2 = 82°$	$7y + 82 = 180°$
$4x = 82 - 2$	$7y = 180° - 82$
$4x = 80$	$7y = 98°$
$x = 20°$	$y = 14°$

9.G.9.1 Hace construcciones geométricas formales con una variedad de herramientas y métodos (ej., compás, regla no graduada, cuerda, dispositivos de reflexión, plegado de papel, programado de geometría dinámica). Copia y biseca un segmento y un ángulo dado; construye rectas perpendiculares, incluida la bisectriz perpendicular de un segmento de recta; y construye una recta paralela a una recta dada que pase por un punto exterior a la recta.

Definición

Cualquier segmento, recta o plano que interseque un segmento en su punto medio se llama bisectriz del segmento

Veamos…



En la siguiente figura M es el punto medio de $\overline{PQ}$. Asi, el punto M , $\overline{TM}$, $\overline{RM}$ y el plano N son bisectores de $\overline{PQ}$ y lo bisecan.

Actividades y Tareas de desempeño de la Unidad

Definir líneas perpendiculares

40 puntos

- Tres estudiantes han propuesto las siguientes maneras para describir cuando dos rectas ℓ y *m* son perpendiculares:

1. ℓ y *m* son perpendiculares si estas se encuentran en un punto y uno de los ángulos en su punto de intersección es un ángulo recto.
2. ℓ y *m* son perpendiculares si se encuentran en un punto y todos sus cuatro ángulos en su punto de intersección son ángulos rectos.
3. ℓ y *m* son perpendiculares si se encuentran en un punto y el reflejo de ℓ se aplica a m para sí misma.

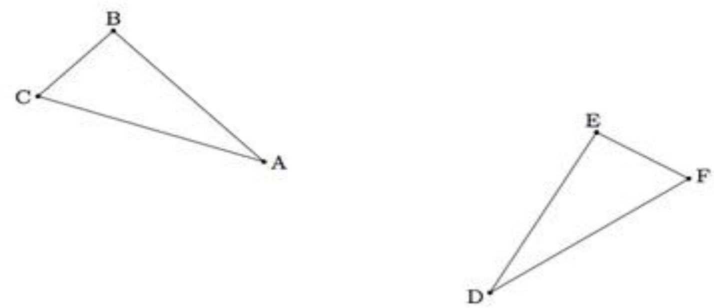
Explica por qué cada una de esas definiciones es correcta. ¿Cuáles son algunas de las ventajas y desventajas de cada una de ellas? 15 puntos

Construcción y ángulos

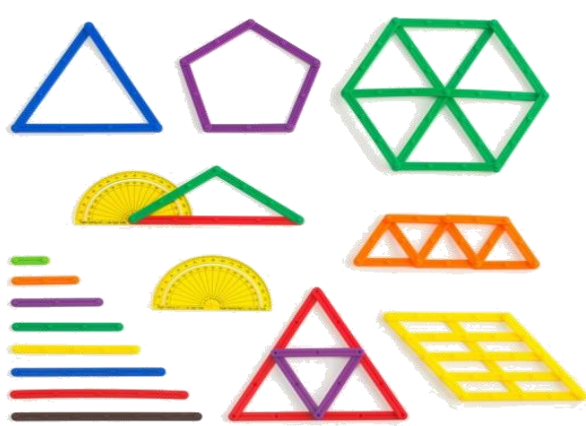
25 puntos

- Dados BC, haga la siguiente construcción y contesta la pregunta.
- Construye la bisectriz perpendicular de BC.
- Identifica el punto medio de BC como M.
- Construye MP de manera que la longitud de MP es igual a la longitud de BM de forma que $MP \perp BC$.
- Dibuja una línea que conecte *B* y *P*.
- ¿Cuál es la medida de $\angle PBM$? Explica tu razonamiento.

- A continuación, está la ilustración de dos triángulos



1. Suponte que hay una secuencia de movimientos rígidos que es la imagen de $\triangle ABC$ a $\triangle DEF$. Explica por qué son congruentes los lados correspondientes y los ángulos de estos triángulos.
2. Suponte que los ángulos y los lados correspondientes de $\triangle ABC$ y DEF son congruentes.
3. Demuestra que hay una secuencia de movimientos rígidos que es la imagen de $\triangle ABC$ a $\triangle DEF$.



Unidad 9.2

Lección 6. Semejanza y Congruencia

Resumen de la unidad - En esta unidad, el estudiante explorará la congruencia y la semejanza de figuras, así como la transformación de las figuras en un plano de coordenadas. Aplicará la geometría de coordenadas y transformaciones (reflexiones, traslaciones y rotaciones), y justificará las figuras semejantes.

Objetivo de la unidad:

1. Clasificar transformaciones de figuras.
2. Evaluar la congruencia de las figuras.
3. Interpretar la semejanza de las figuras.
4. Justificar los teoremas de triángulos.

Introducción:

Vivimos en un espacio donde abundan las formas. La Geometría estudia la naturaleza de estas formas, como las definimos y que nos enseñan sobre el mundo que nos rodea. Los pueblos antiguos dedicaron mucho tiempo al estudio de la naturaleza al descubrir la amplia presencia de ideas geométricas en su entorno físico. Este descubrimiento dio origen al uso y la aplicación de los conceptos geométricos en la vida diaria.

Cuando pensamos en la forma y el tamaño de las figuras geométricas, consideramos la posibilidad de que algunas de ellas coincidan con otras. Por ejemplo, las hojas de un árbol son aproximadamente iguales o parecidas entre sí. La Geometría establece maneras de trabajar con estas coincidencias mediante los conceptos de congruencia y semejanza.

La congruencia y la semejanza de las figuras son conceptos fundamentales de la geometría euclidiana. Las figuras congruentes son idénticas mientras que, si son semejantes, estas tienen ángulos de igual medida y lados correspondientes en la misma proporción. Decimos que las figuras congruentes son semejantes pero las figuras semejantes no son necesariamente congruentes.

9.G.5.1 Compara y contrasta la igualdad, la congruencia y la semejanza.

9.G.7.5 Construye una representación de una figura semejante a otra figura dada su razón de semejanza.

9.G.7.6 Utiliza triángulos semejantes para demostrar que la razón de cambio asociada a cualquier par de puntos en una línea es la misma.

Teorema de la semejanza LLL. Si los tres lados de un triángulo son proporcionales a los tres lados de otro triangulo, entonces los dos triángulos son semejantes.

Teorema de la semejanza LAL. Si un ángulo de un triángulo es congruente con el ángulo de otro triangulo, y si los lados correspondientes que incluyen al ángulo son proporcionales, entonces los triángulos son proporcionales.

Teorema

Dada una reflexión sobre una recta:

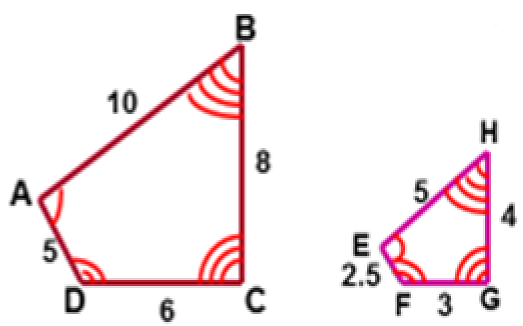
a. la imagen reflejada de un segmento es un segmento de igual longitud.
b. La imagen reflejada de un ángulo es un ángulo de igual medida.

Ver los siguientes ejemplos:

Poligonos semejantes- dos poligonos son semejantes si y solo si, sus ángulos correspondientes son congruentes y las medidas de sus lados correspondientes son proporcionales.

Ejemplo: La definicion establece que cuando las dos figuras son semjantes los ángulos corerespondientes son congruentes y las medidas de sus lados correspondientes son proporcionales.

Los polígonos que se muestran a continuación son semajantes.



Leyenda: El simbolo ~ significa semejante y

Escribimos ABCD~EFGH, podemos notar que

$$\angle A \equiv \angle E, \angle D \equiv \angle F$$

$$\frac{AD}{EF} \equiv \frac{DC}{FG} \equiv \frac{CB}{GH} \equiv \frac{AB}{HE} = 2$$

La razón de la longitudes de los lados correspondientes de dos polígonos semejantes es llamado factor escala. El factor escala de ABCD al EFGH es 2, el factor escala de EFGH al ABCD es $\frac{1}{2}$.

Ejemplo 1:

(ABCD al EFGH):

a) $\frac{AD}{EF} = \frac{5}{2.5} = 2$ b) $\frac{DC}{FG} = \frac{6}{3} = 2$ c) $\frac{CB}{GH} = \frac{8}{4} = 2$

d) $\frac{AB}{HE} = \frac{10}{5} = 2$

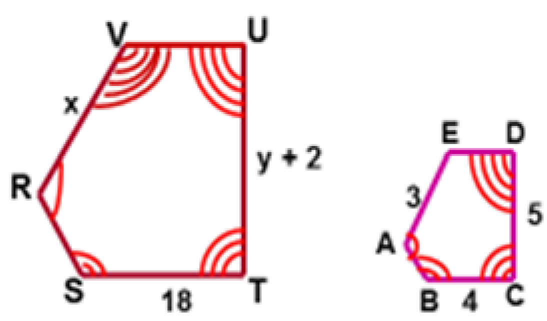
Por otro lado (EFGH al ABCD):

a) $\frac{EF}{AD} = \frac{2.5}{5} = \frac{1}{2}$ b) $\frac{FG}{DC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ c) $\frac{GH}{CB} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

b) $\frac{HE}{AB} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

Ejemplo 2:

El polígono RSTUV ~ABCDE



a) Encuentra el factor escala: (RSTUV al ABCDE)

$$FE = \frac{ST}{BC} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$$

b) Hallar el valor de x (escribiendo proporciones)

$$\frac{ST}{BC} = \frac{VR}{EA} \rightarrow \frac{18}{4} = \frac{x}{3}$$

$$4(x) = 3\ (18)$$

$$4x = 54$$

$$x = 13.5$$

c) Halla el valor de y:

$$\frac{ST}{BC} = \frac{UT}{DC} \rightarrow \frac{18}{4} = \frac{y+2}{5}$$

$$4(y+2) = 18(5)$$

$$4y + 8 = 90$$

$$4y = 90 - 8$$

$$4y = 82$$

$$y = 20.5$$

9.G.5.2 Usa descripciones geométricas de movimientos rígidos para transformar figuras y predecir el efecto de un movimiento rígido dado sobre una figura dada; dadas dos figuras, usa la definición de congruencia en términos de movimientos rígidos para decidir si son congruentes.

Un movimiento rígido es una transformación que conserva la longitud y la medida del ángulo. Otro nombre para el movimiento rígido es una isometría. Un movimiento rígido relaciona líneas con líneas, rayos con rayos y segmentos con segmentos.

Postulado de la traslación

Una traslación es un movimiento rígido.

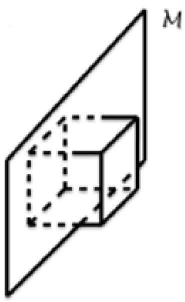
Teorema de la composición

La composición de dos o más movimientos rígidos es un movimiento rígido.

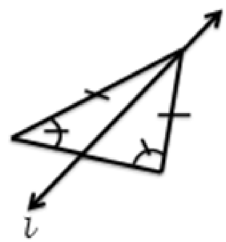
Definiciones:

1. **Isometría-** Una relación en que la figura original y su imagen son congruentes.
2. **Conjunto de puntos simétricos:** Estos puntos tienen simetría a través de un plano si existe un plano tal que, al reflejar la figura a través de este plano, se obtiene el mismo conjunto de puntos.

Ejemplos:



Cubo simetrico a traves del plano $\mathcal{M}$

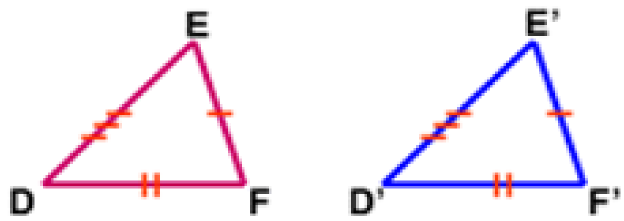


Δ Isosceles simetrico a traves de la recta l.

Dado que una traslación es un movimiento rígido y el movimiento rígido conserva la longitud y la medida del ángulo, los siguientes enunciados son verdaderos para la traslación que se muestra.

Dado: $\Delta DEF, \Delta D'E'F'$

Figura:



$\overline{DE} = \overline{D'E'}, \overline{EF} = \overline{E'F'}, \overline{FD} = \overline{F'D'}$

$m\angle D = m\angle D', m\angle E = m\angle E', m\angle F = mF'$

Cuando dos o más transformaciones se combinan para formar una sola transformación, el resultado es una composición de transformaciones.

9.G.5.3 Usa la definición de congruencia en términos de movimientos rígidos para mostrar que dos triángulos son congruentes si, y solo si, los pares de lados correspondientes y los pares de ángulos correspondientes son congruentes.

En geometría, se requiere una definición apropiada para decidir cuando dos figuras, ΔABC y ΔDEF, son congruentes.

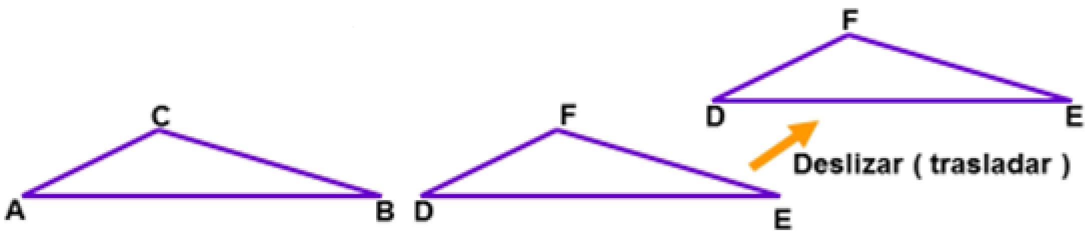
Definición:

Dos triángulos son congruentes si hay una correspondencia entre sus vértices de manera que cada par de lados y ángulos correspondientes sean congruentes. Obsérvese que la congruencia puede definir de manera similar para otras figuras.

Triángulos congruentes ($\equiv\ 's$)

Cada Δ tiene seis partes, tres ángulos y tres lados, si las seis partes correspondientes de un Δ son congruentes con las seis partes de otro Δ entonces los triángulos son congruentes.

Veamos



Si deslizas (trasladas) un Δ DEF, ΔDEF se mantiene congruente a ΔABC

En esta prueba de dibujo, se observa que:

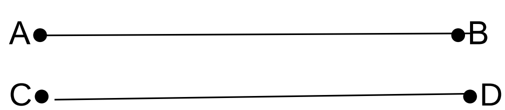
AB ≡ DE	<A ≡ <D
BC ≡ EF	<B ≡ <E
AC ≡ DF	<C ≡ <F

9.G.5.4 Explica que los criterios de congruencia de triángulos (ALA, LAL, LLL) nacen de la definición de congruencia en término de movimientos rígidos.

Definición:

Congruente – que tienen la misma medida.

Ejemplo:



Se escribe $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$

Dos segmentos son congruentes si tienen la misma longitud.

Teorema de congruencia ángulo – lado – ángulo (ALA**)**

Si dos ángulos y el lado incluido de un triángulo son congruentes con dos ángulos y el lado incluido de un segundo triangulo, entonces los dos triángulos son congruentes.

Teorema de congruencia – lado – ángulo – lado (LAL)

Si dos lados y el ángulo incluido de un triángulo son congruentes a dos lados y el ángulo incluido de un segundo triangulo, entonces los dos triángulos son congruentes

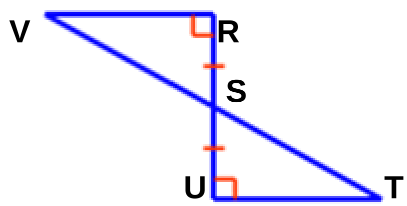
Teorema de congruencia lado – lado –lado (LLL)

Si tres lados de un triángulo son congruentes con tres lados de un segundo triangulo, entonces los dos triángulos son congruentes.

Teorema y postulados: (ALA)

Si dos ángulos y el lado incluido de un Δ son ≡ a los ángulos y el lado incluido de otroΔ, entonces los triángulos son congruentes.

Figura:



Dado:

$\overline{VR} \perp \overline{RS}$

$\overline{UT} \perp \overline{SU}$
$\overline{RS} \equiv \overline{US}$

Conclusión:

$\angle R \ y \ \angle U$ son rectos.

$\angle R \ \equiv \ \angle U$ son ángulos congruentes.

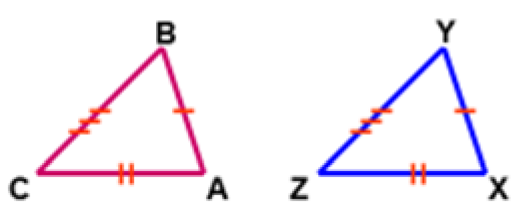
$\angle RSV \ \equiv \ \angle UST$ son ángulos opuestos congruentes.

ΔVRS ≡ ΔUST (ALA)

Postulado (LLL)

Si tres lados de un Δ con congruentes respectivamente a tres lados de otro Δ entonces los triángulos son congruentes.

Figura:



Dado:

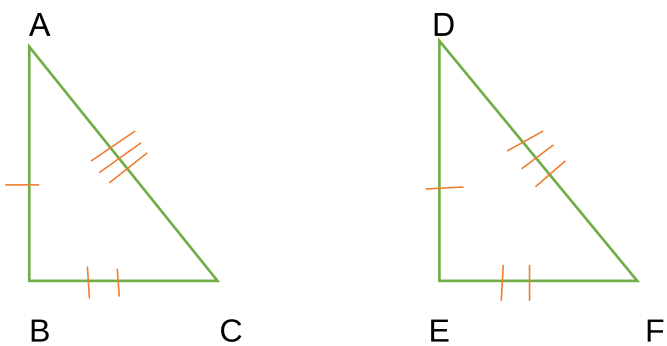
ΔABC, ΔXYZ

$\overline{AB} \equiv \overline{XY}, \overline{BC} \equiv \overline{YZ}, \overline{CA} \equiv \overline{ZX}$

Conclusión:

$\Delta ABC \ \equiv \Delta XYZ$

Ejemplo LLL



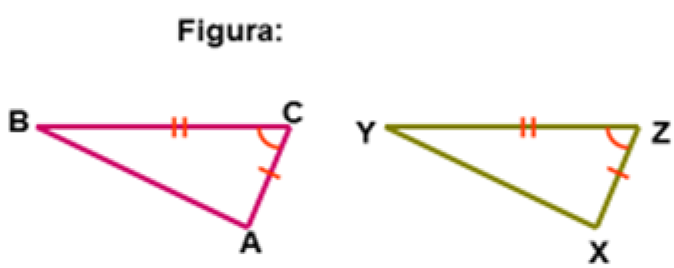
∆ABC≡∆DEF

AB ≡DE, BC≡EF, AC≡DF

Postulado (LAL)

Si dos lados y el ángulo incluido de un triángulo son congruentes a dos lados y al ángulo incluido de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

Ejemplo:



Dado:

$\overline{AC} \equiv \overline{XZ}$

$\angle C \equiv \angle Z$

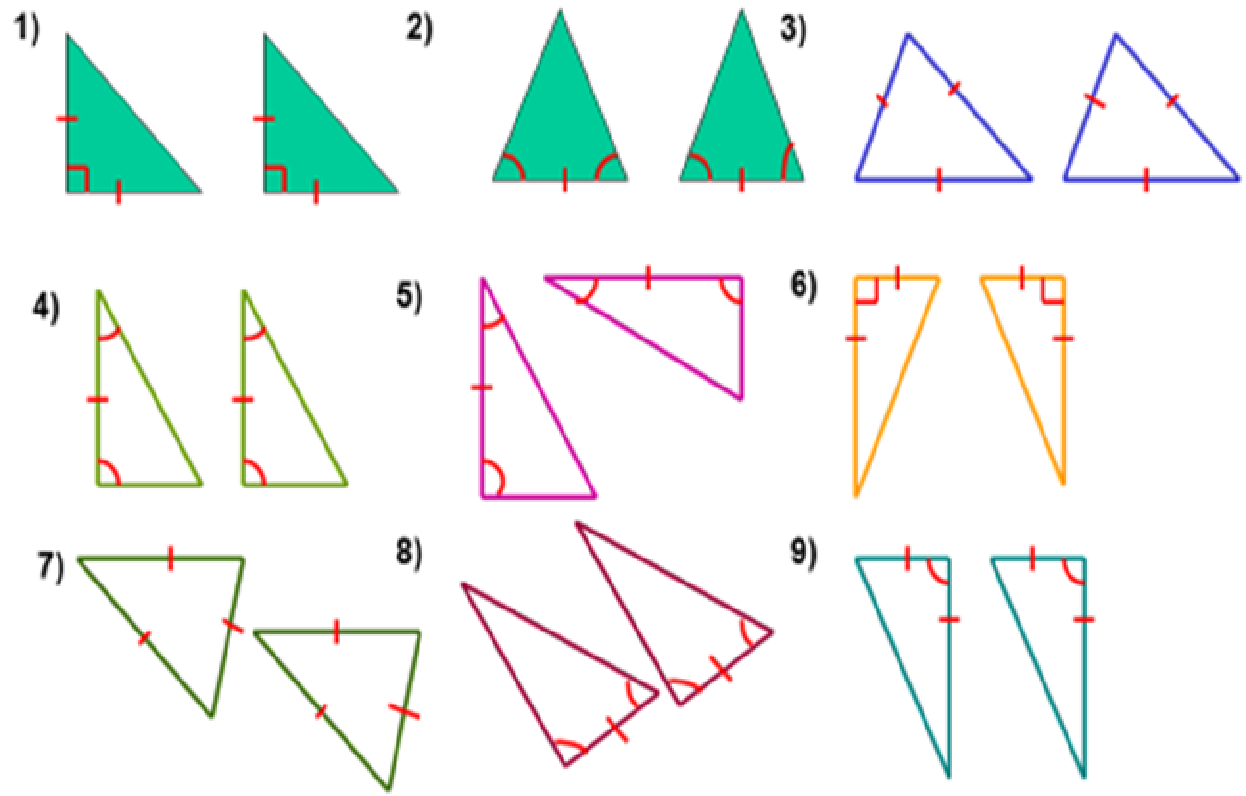
$\overline{CB} \equiv \overline{ZY}$

Conclusión

$\Delta ABC \equiv \Delta XYZ$

Triangulos Congruentes – Postulados (LLL, ALA, LAL)

Practica Para cada ejercicio completa la proposición de congruencia.



9.G.6.2 Dado un rectángulo, paralelogramo, trapecio o polígono regular, describe las rotaciones y reflexiones que mueven a estas figuras sobre sí mismas.

9.G.6.3 Desarrolla definiciones para rotación, reflexión y traslación en términos de ángulos, círculos, rectas perpendiculares, rectas paralelas y segmentos de recta.

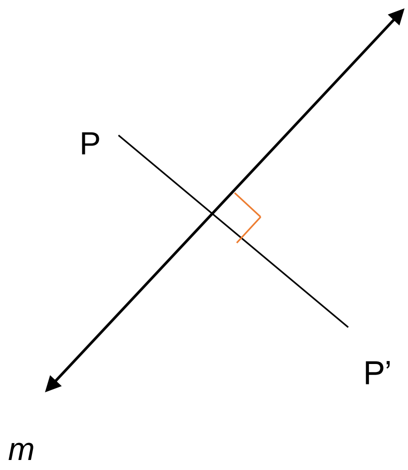
Una reflexión es una transformación que usa una línea como espejo para reflejar una figura. La línea especular se conoce como el eje de reflexión.

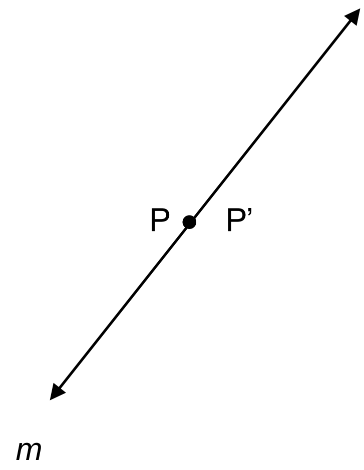
Una reflexión en una línea *m* relaciona todo punto *p* en el plano con un punto *p’* , de manera que para cada punto una de las siguientes propiedades es verdadera.

Si P no está en *m* , entonces *m* es la mediatriz de PP’ , o

Si P está en *m* , entonces P = P’ .

Figura:





punto P no está en *m*

punto P está en *m*

9.G.6.4 Dada una figura geométrica y una rotación, reflexión o traslación, dibuja la figura transformada usando, por ejemplo, papel milimetrado, papel para calcar o programados de geometría. Especifica una secuencia de transformaciones que mueve a una figura dada sobre otra.

9.G.7.1 Reconoce que una figura bidimensional es congruente con otra si la segunda se puede obtener de la primera mediante una secuencia de rotaciones, reflexiones y traslaciones; dadas dos figuras congruentes, describe una secuencia que muestre la congruencia que hay entre ellas.

9.G.7.2 Describe el resultado de transformaciones, traslaciones, rotaciones y reflexiones de figuras bidimensionales usando coordenadas.

Como has podido observar, existen muchas formas diferentes de probar que dos triángulos son congruentes. Es importante saber todas las diferentes formas de probar congruencia, a la vez que es importante conocer cuáles son las combinaciones de lados y ángulos que *no* prueban congruencia.

Repaso de teoremas de congruencia

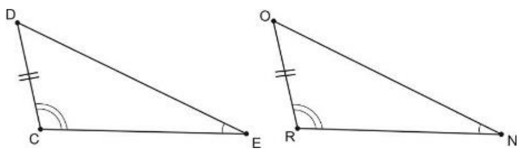
Tal como lo has estudiado en lecciones previas, existen cinco teoremas y postulados que te proporcionan diferentes caminos para probar que dos triángulos son congruentes sin tener que revisar todos los ángulos y lados de ambos. Es importante conocer muy bien estas cinco reglas, de manera que puedas utilizarlas en aplicaciones prácticas.

Nombre	Partes congruentes correspondientes	¿Demuestra que los triángulos son congruentes?
Lado, lado, lado (LLL)	Tres lados	Sí
Lado, ángulo, lado (LAL)	Dos lados y el ángulo entre ambos	Sí
Ángulo, lado, ángulo (ALA)	Dos ángulos y el lado entre ambos	Sí
Ángulo, ángulo, lado	Dos ángulos y un lado que no está entre ambos	Sí
Hipotenusa, cateto (HL)	La hipotenusa y un cateto en un triángulo rectángulo	Sí
Ánguo, ángulo, ángulo (AAA)	Tres ángulos	No. Se creará un triángulo semejante, pero no de igual tamaño.
Lado, lado, ángulo (LLA)	Dos lados y un ángulo que no está entre ambos	No. Esto puede crear más de un triángulo distinto.

Cuando tengamos dudas, pensemos en los modelos que creamos. Si podemos construir un único triángulo a partir de las restricciones dadas, entonces podemos demostrar congruencia. Si podemos crear más de un triángulo con la información proporcionada, entonces no podemos probar congruencia.

Ejemplo:

¿Cuál regla puede probar que los triángulos que siguen son congruentes?



A. LLL

B. LLA

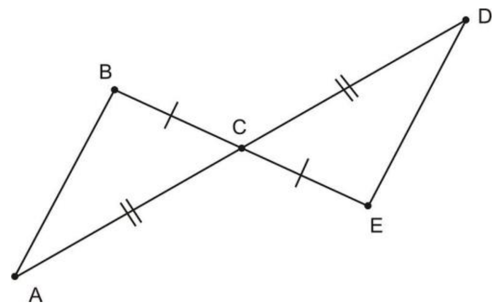
C. ALA

D. AAL

Los dos triángulos en la figura tienen dos pares de ángulos congruentes y un par de lados congruentes correspondientes. Así, el postulado de congruencia que seleccionemos debe tener dos A′s (por los ángulos) y una L (por el lado). consiguiente, podemos eliminar las opciones A y B. Ahora, para decidir entre las opciones C y D, necesitamos identificar dónde se ubica el lado con relación a los ángulos dados. En este caso debe ser adyacente a un ángulo, pero no debe estar entre ambos. Por lo tanto, podemos demostrar congruencia con la regla AAL. Entonces, la respuesta correcta es D.

En algunas ocasiones no se nos presentan las figuras con todas las partes correspondientes congruentes de manera explícita, sino que debemos estudiar muy bien la figura y determinar si se puede aplicar algún teorema o postulado de congruencia. Observemos el siguiente ejemplo.

¿Cómo podrías demostrar que *△ABC≅△DEC* en el diagrama de abajo*?*



Podemos observar inmediatamente que BC ≅ CE y AC ≅ CD. Por lo tanto, podríamos utilizar las reglas LLL o LAL para demostrar que los triángulos son congruentes. Sin embargo, para usar la regla LLL, necesitaríamos que AB ≅ DE y esto no puede demostrarse inmediatamente. ¿Podemos demostrar que dos de los ángulos son congruentes? Nota que ∠BCA y que ∠ECD son "ángulos opuestos por el vértice *(ángulos no adyacentes formados por la intersección de dos líneas rectas, es decir, ángulos que se ubican en las secciones opuestas de la intersección.).*

El teorema de los ángulos opuestos por el vértice establece que todos los ángulos opuestos por el vértice son congruentes. Así, esto nos dice que ∠BCA ≅ ∠ECD. Finalmente, con toda esta información, podemos corroborar que △ABC ≅ △DEC por el postulado LAL.

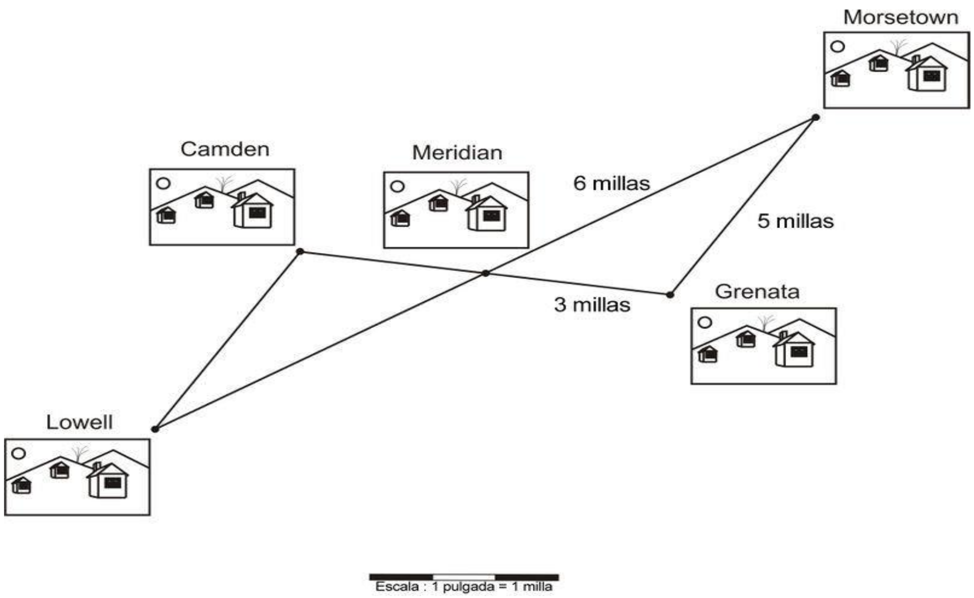
Aplicación de triángulos congruentes

Una forma de aplicar el concepto de triángulos congruentes consiste en determinar distancias en casos concretos de la vida cotidiana usualmente, cuando se utiliza un mapa o un diagrama como modelo.

Cuando utilizamos triángulos congruentes para identificar distancias, debemos asegurarnos de parear los lados de dos triángulos que sean correspondientes. De hecho, el error más común que se comete en este tipo de problemas es parear dos lados que no son correspondientes. Observemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo

El mapa siguiente muestra 5 ciudades diferentes. La ciudad de Meridian debe su nombre al hecho de que se ubica exactamente a mitad de camino entre dos pares de ciudades: dos de ellas son Camden y Grenata, mientras que las otras son Lowell y Morsetown.



Haciendo uso de la información proporcionada en el mapa, ¿cuál es la distancia entre Camden y Lowell?

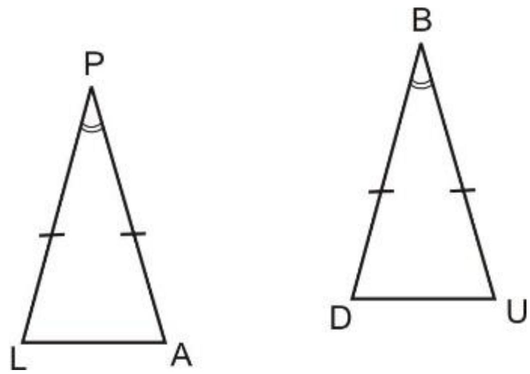
El primer paso en este problema es identificar si los triángulos marcados son, o no, congruentes. Como observamos que la distancia de Camdem a Meridian es la misma que de Meridian a Grenata, esos lados son congruentes. De modo similar, dado que la distancia entre Lowell y Meridian es la misma que entre Meridian y Morsetown, estos otros dos lados son, a su vez, un par congruentes. Debe notarse también que los ángulos que subtienden estas líneas (donde está ubicada Meridian) son también congruentes porque son ángulos opuestos por el vértice.

Entonces, por el postulado LAL, estos dos triángulos son congruentes. Este hecho nos permite encontrar la distancia entre Camden y Lowell al identificar el lado correspondiente en el otro triángulo. Puede observarse que el lado que conecta Camden y Lowell es correspondiente con el que conecta Morsetown y Grenata; esto debido a que cada uno de estos dos lados es opuesto al ángulo opuesto por el vértice correspondiente.

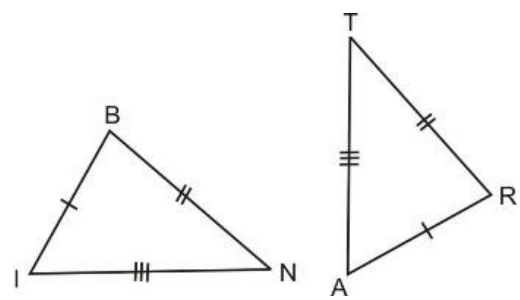
Además, dado que los triángulos son congruentes, estos lados correspondientes son, a su vez, congruentes entre sí. Por lo tanto, la distancia entre Camden y Lowell es de cinco millas.

Para cada par de triángulos, completa la afirmación de congruencia de triángulos, o bien, escribe “no es posible establecer afirmación de congruencia.” Indica el nombre del postulado de congruencia que has utilizado, o bien, escribe una justificación que explique por qué no puedes establecer una afirmación de congruencia de triángulos.

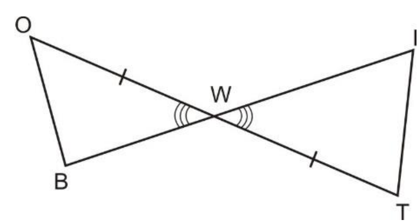
1. $\triangle PAL \cong \triangle$ ___________.



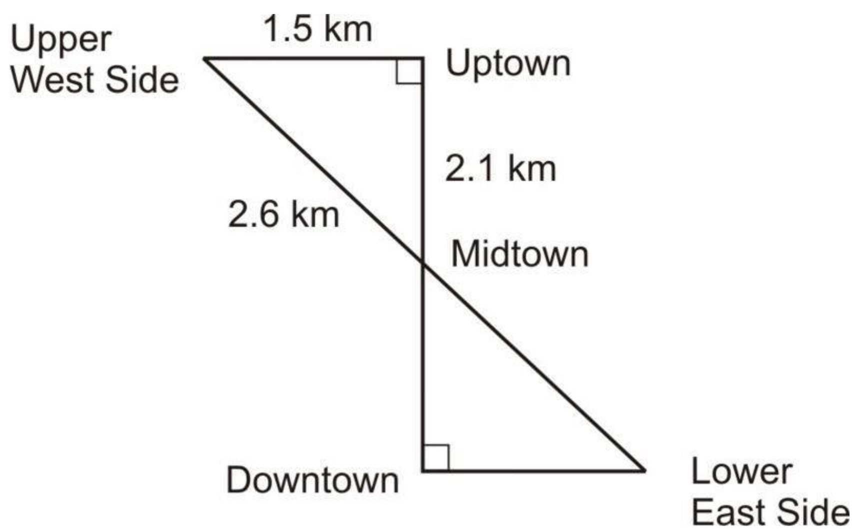
2. $\triangle BIN \cong \triangle$___________.



3. $\triangle BOW \cong \triangle$___________.



4. En el siguiente diagrama, Midtown se encuentra exactamente a mitad de camino entre Uptown y Downtown. ¿Cuál es la distancia entre Downtown y Lower East Side? ¿Cómo la determinaste? Escribe algunas breves líneas para convencer al lector de que tu respuesta es correcta.



Respuestas a los ejercicios de práctica

1. LAL
2. LLL
3. No es posible establecer congruencia porque no hay suficiente información.
4. 1.5 km

Evaluación 4: 52 puntos

1. Completa las igualdades que hacen que se cumplan las congruencias de los triángulos. 6 pts

a. $\overline{PJ} =$ _____

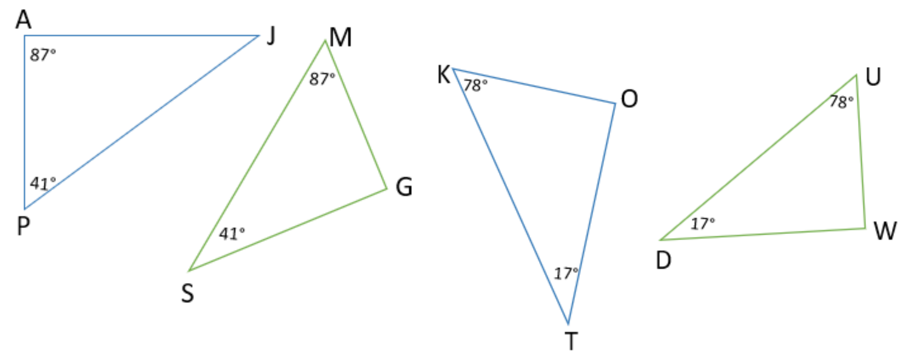
b. $\overline{DU} =$ _____

c. $< G =$ _____

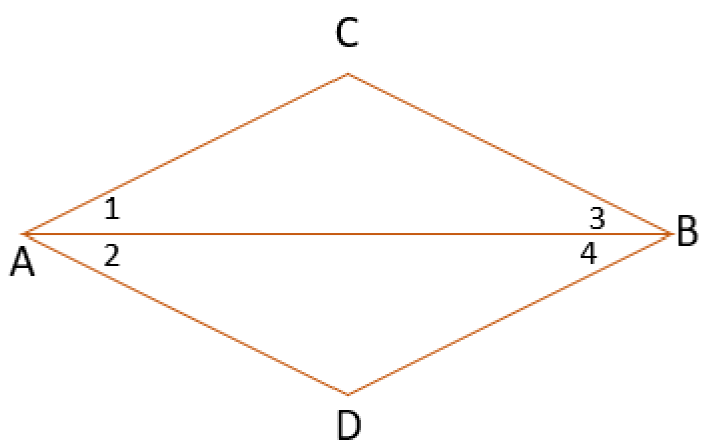
d. $< O =$ _____

e. $\overline{SM} =$ _____

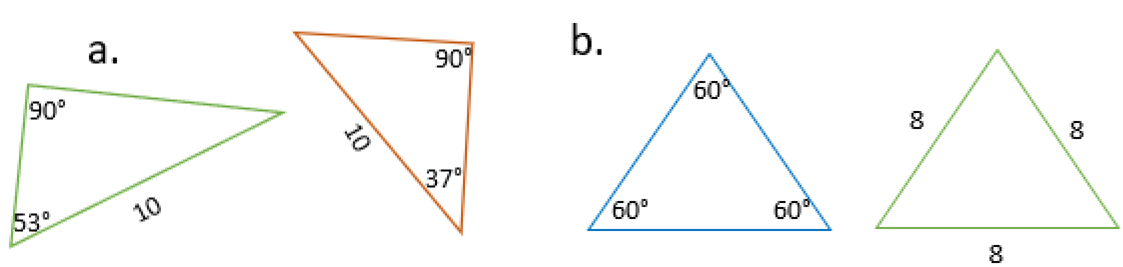
f. $< K =$ _____



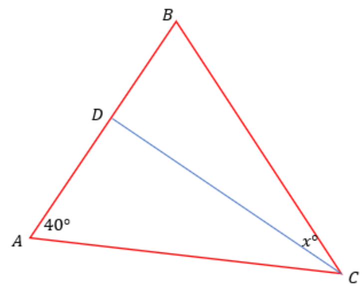
2. Si el $\Delta ABC \cong \Delta ABD$, señalar los lados y ángulos correspondientes. Además, se tiene que $< 1 \cong < 2$ y $< 3 \cong < 4$. 7 pts



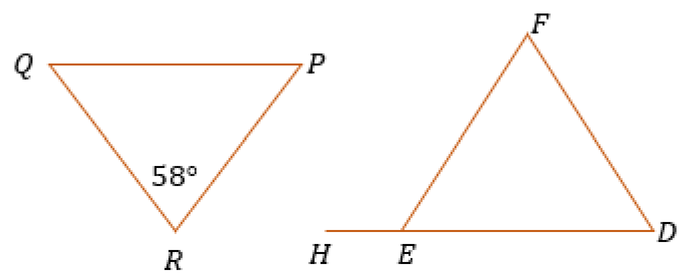
3. Se muestra una pareja de triángulos congruentes. ¿Cuál es el postulado o teorema que justifica su congruencia? 4 pts



4. En el triángulo $ABC, \overline{AD} \cong \overline{CD} \cong \overline{DB}$. ¿Cuál es la medida del ángulo x? 5 pts.



5. $\Delta QRP \cong \Delta DFE$, si $\overline{QP} \cong$, ¿cuánto mide el ángulo exterior HEF? 5 pts

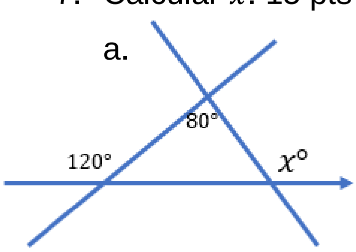


6. ¿En cuál de las alternativas se encuentra el dato que falta para afirmar que $\Delta ABC \cong \Delta DEF$? Haz un dibujo para mostrarlo. 5 pts.

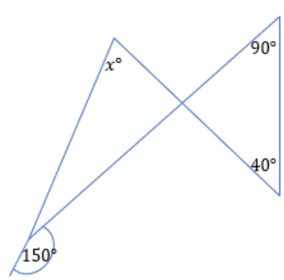
   a. $\overline{AB} \cong \overline{DE}$
   b. $< C \cong < F$
   c. $\overline{AC} \cong \overline{DF}$
   d. $< B \cong < E$
   e. $No\ requiere\ dato\ adicional$

7. Calcular x. 15 pts

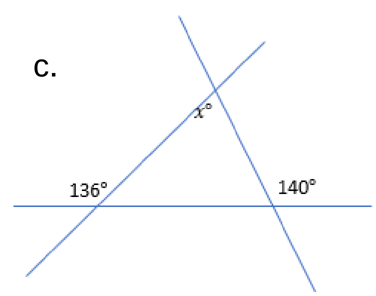
   a.



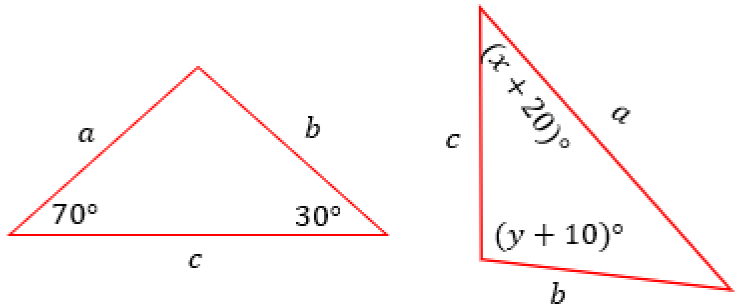
   b.

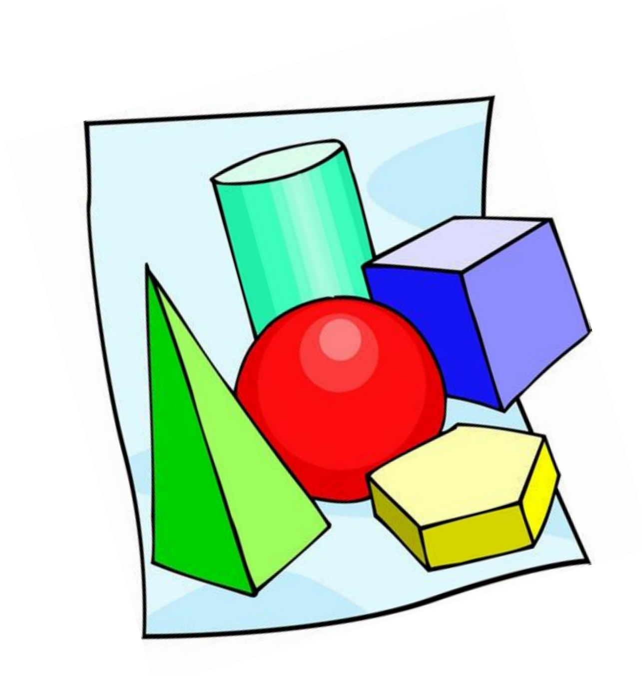


   c.



8. Calcular $x + y$. Dado que los triángulos son congruentes y $a \leftrightarrow a, b \leftrightarrow b$ y $c \leftrightarrow c$. 5 pts.





Lección 7. Transformaciones

Objetivos:

Al finalizar las lecciones el estudiante podrá

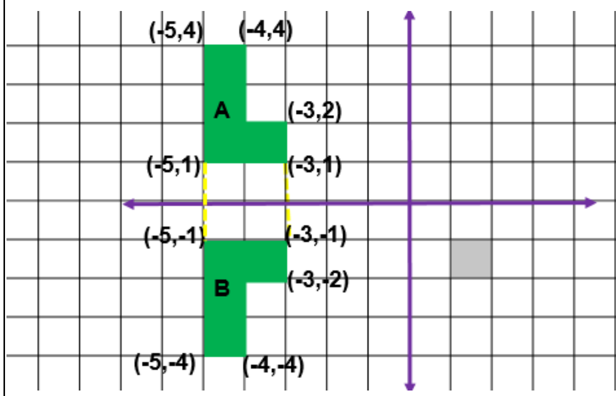
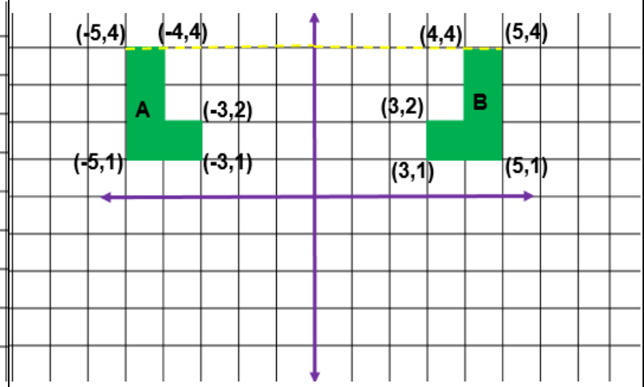
a) Efectuar y representar transformaciones de figuras respecto a una línea en el plano de coordenadas.
b) Indicar las nuevas coordenadas de una figura luego de una transformación; traslación, rotación y reflexión.

Una transformación es una operación que genera un cambio en la imagen de figura geométrica.

Imagen recuperada de https://pixabay.com/photos/waters-nature-mountain-lake-3102729/

En la ilustración 1 podemos observar como la imagen se transforma reflejándose sobre el eje de x.

Reflexión- Los puntos de las figuras o imágenes están a la misma distancia de la línea de reflexión.

<table>
<tr><th>Respecto al Eje de x</th><th>Respecto al Eje de y</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Las coordenadas en y cambian a su opuesto.</td><td>Las coordenadas en x cambian a su opuesto.</td></tr>
<tr><td>Podemos aplicar la fórmula de distancia entre dos puntos para comprobar la equivalencia entre un punto de la figura A y la figura B al eje de x.

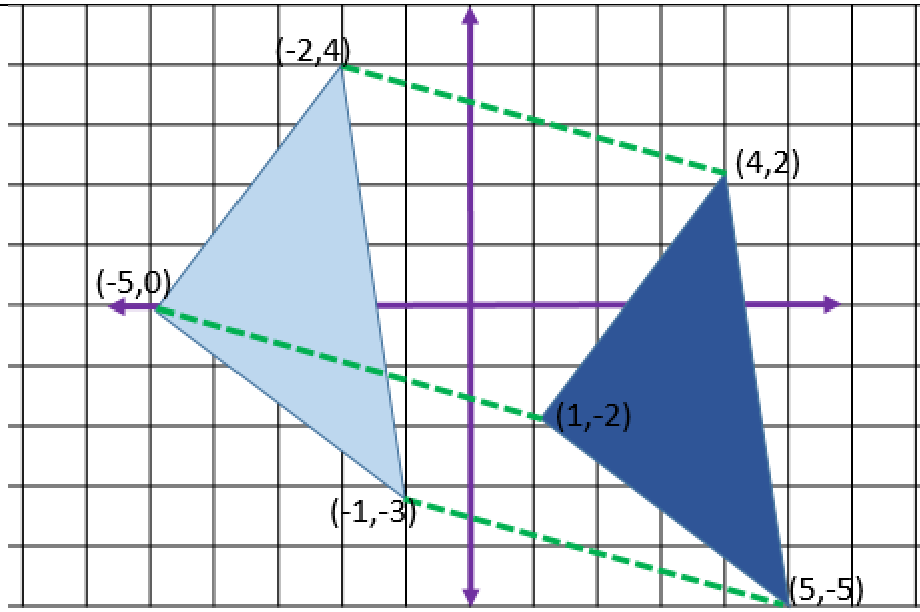
(-5,1) a (5,0) = $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
= $\sqrt{(5--5)^2+(\,0-1)^2}$
=$\sqrt{(10)^2+(\,-1)^2}$
=$\sqrt{100+1}$
=$\sqrt{101}$

(-5,-1) a (5,0) = $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
= $\sqrt{(5-(-5))^2+(\,0-(-1))^2}$
=$\sqrt{(10)^2+(\,1)^2}$
=$\sqrt{100+1}$
=$\sqrt{101}$</td><td>Apliquemos la fórmula de distancia entre dos puntos para comprobar la equivalencia entre un punto de la figura A y la figura B al eje de y.

(-5,4) a (0,4) = $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
= $\sqrt{(0--5)^2+(\,4-4)^2}$
=$\sqrt{(5)^2+(\,0)^2}$
=$\sqrt{25+0}$
= $\sqrt{25}$ = 5

(5,4) a (0,4) = $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
= $\sqrt{(0-5)^2+(\,4-4)^2}$
=$\sqrt{(-5)^2+(\,0)^2}$
=$\sqrt{25+0}$
= $\sqrt{25}$ = 5</td></tr>
</table>

Traslación- En una traslación todos los puntos de una figura o imagen se mueven hacia una dirección específica sin alterar su forma o tamaño.



La figura azul claro se trasladó 6 unidades hacia la derecha y dos hacia abajo. Por lo tanto sus nuevas coordenadas se pueden hallar sumando 6 a las coordenada de x y restando 2 a las coordenada de y.

(-2,4) Figura original

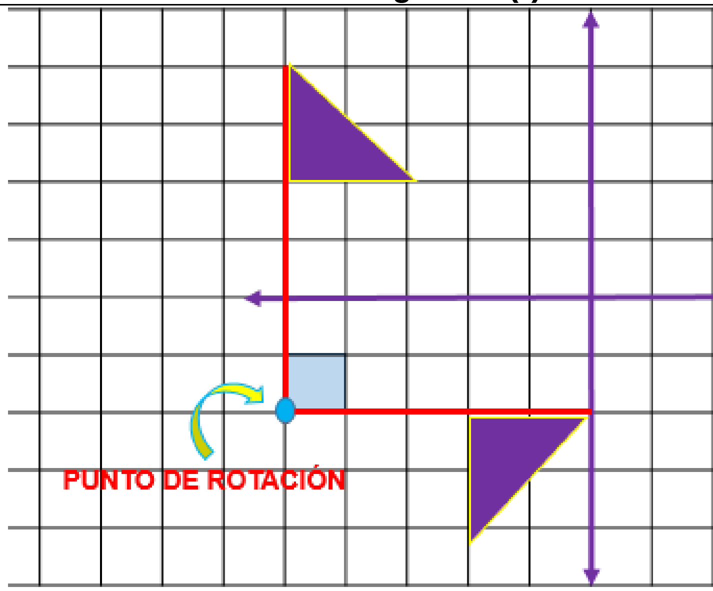
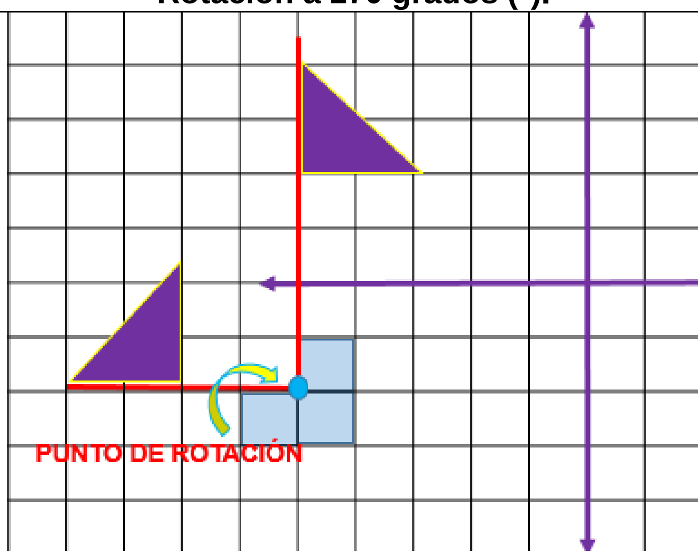
-2 + 6 = 4

4 – 2 = 2

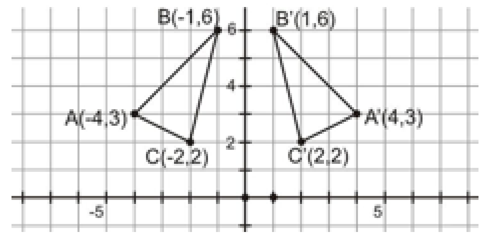
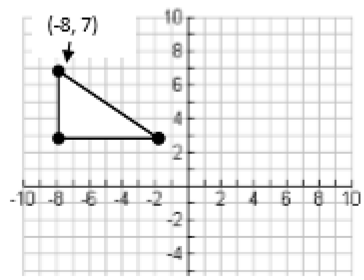
(4,2) Figura prima

Comprueba con las otras coordenadas:

Rotación- La rotación es el movimiento de una figura en base de un punto. Se mide en grados y solo cambia de posición.

Rotación a 90 grados (°).

Rotación a 270 grados (°).


Ejercicios: 25 puntos

<table>
<tr><td colspan="2">Utiliza la ILUSTRACION 2 para contestar los ejercicios 1 y 2.</td></tr>
<tr><td>1) ¿Qué tipo de transformación de congruencia se presenta en la siguiente ilustración? 1 pt
a) rotación
b) Traslación
c) Reflexión
d) Dilatación</td><td>
</td></tr>
<tr><td>2) Indica las nuevas coordenadas que tendría la figura A si se refleja respecto al eje de x. Dibuja a la derecha. 10 pts.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Utiliza la ILUSTRACION 3 para contestar los ejercicios 3 y 4.</td></tr>
<tr><td>3) Si al siguiente triángulo se le aplican las siguientes transformaciones: se traslada 9 unidades hacia la derecha y 2 unidades hacia abajo. Indica las nuevas coordenadas. Haz el dibujo y contesta. 4 pts.</td><td>

ILUSTRACION 3</td></tr>
<tr><td>4) Realiza una reflexión respecto al eje de y. Luego rota la figura 360 grados respecto al punto (2,-2), describe lo que le sucede a la figura. 10 pts.</td><td></td></tr>
</table>

9.G.7.3 Identifica las condiciones de semejanza LAL, LLL, AA como condiciones suficientes para establecer la semejanza de triángulos, las aplica y observa que la congruencia es un caso especial de semejanza.

9.G.7.4 Utiliza la semejanza para calcular las medidas de las partes correspondientes de figuras semejantes, y aplica la semejanza en una variedad de contextos en matemáticas y otras disciplinas. Usa criterios de congruencia y semejanza de triángulos para resolver problemas y demostrar relaciones entre figuras geométricas.

Lado – Ángulo – Lado (LAL)

Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos es igual.

Lado – Lado – Lado (LLL)

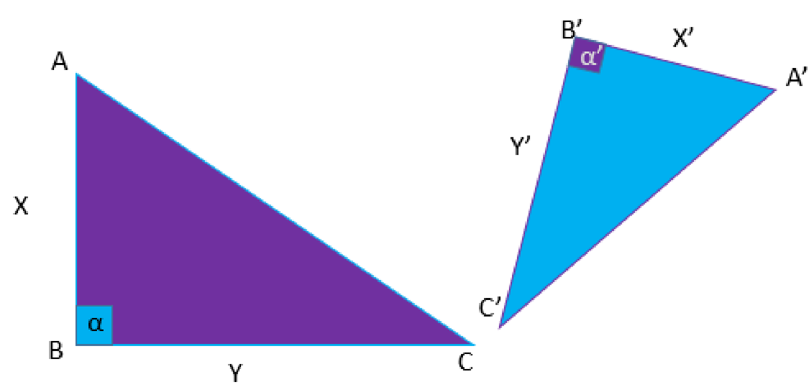
Dos triángulos son semejantes si sus lados correspondientes son proporcionales.

Ángulo – Ángulo (AA)

Dos triángulos son semejantes si tienen dos pares de ángulos correspondientes congruentes.

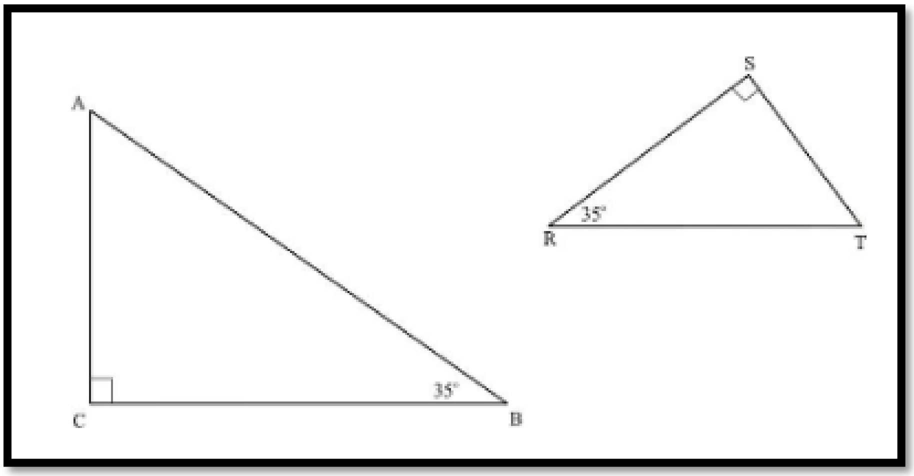
Ejercicios 38 puntos

Utiliza la siguiente ilustración para contestar los ejercicios 1 y 2.



1. ¿Cuál criterio de semejanza de triángulos se cumple en la ilustración? 1 pt	**a) LLL** **b) AA** **c) LAL** **d) AAA**
2. Si X =12, Y = 16, **y’**=4, halla el valor de **x’**. Explica por qué se cumple el criterio de semejanza. 10 pts.	

3. Observa la siguiente ilustración y conteste 10 pts



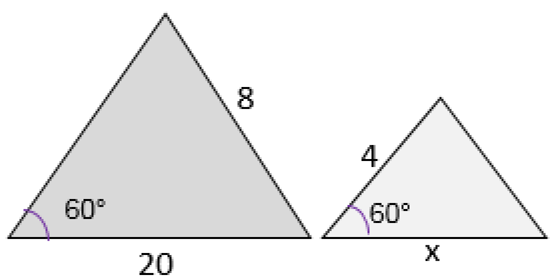
¿Son triángulos semejantes?

¿Qué criterio de semejanza se cumple?

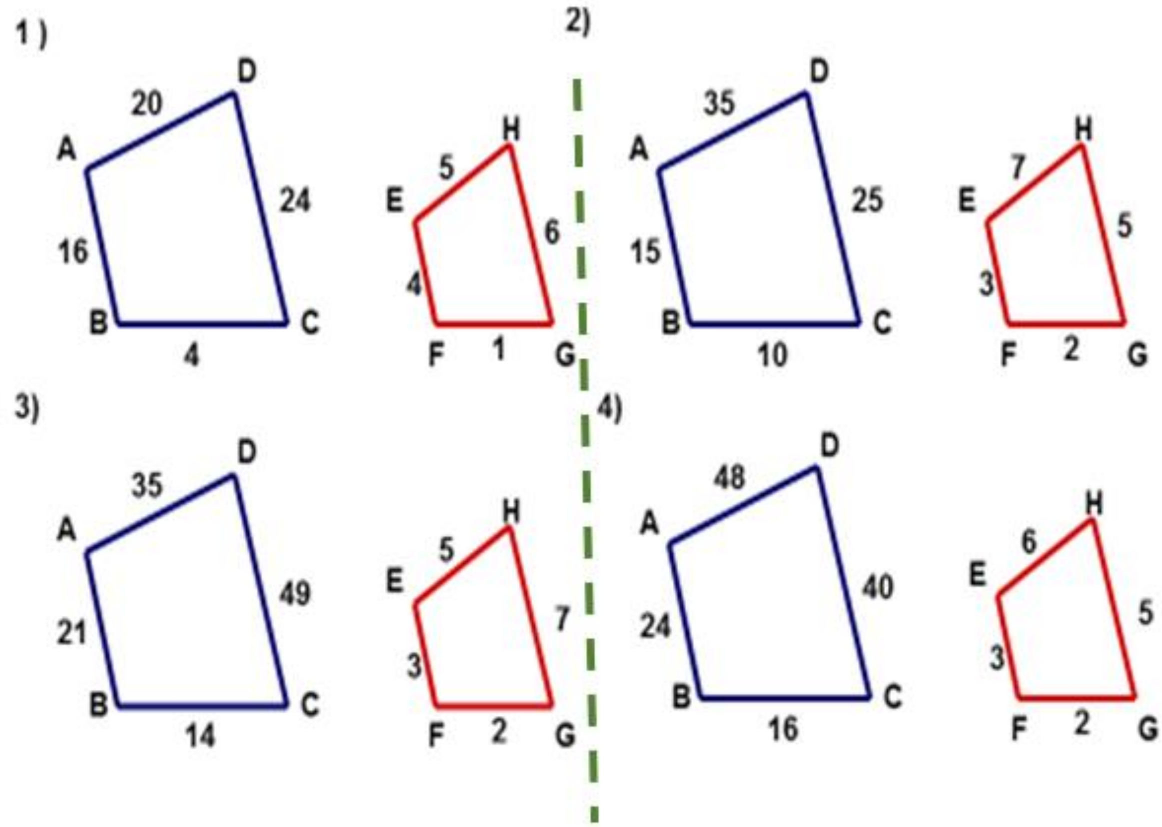
¿Cuántos grados medirán los ángulos A y T?

¿Se puede considerar dos triángulos congruentes? Explica

4. Halla el valor de x. 5 pts.



Practica: Dadas las figuras encuentra el factor escala si son semejantes: ABCD~EFGH
12 pts.



9.G.7.7. Utiliza transformaciones centradas en el origen para describir e investigar semejanzas.

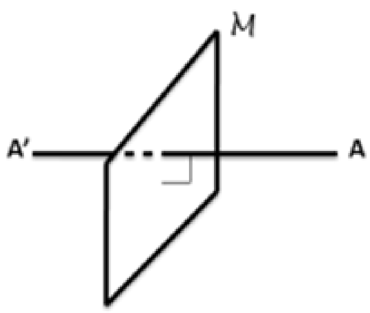
Transformaciones

Definiciones:

1) **Transformación:** es una regla que asigna una nueva ubicación o locaclización a cada punto del conjunto. Estas proyecciones pueden ser muy variadas y complejas o ser muy simples.

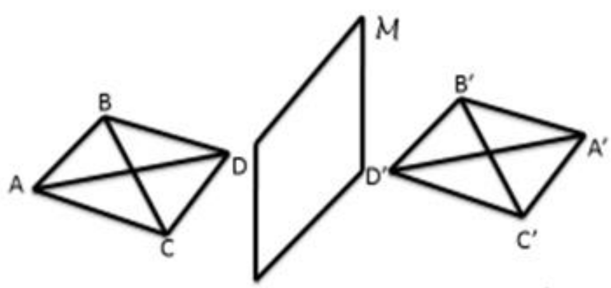
   Por ejemplo: una proyección muy sencilla es la que a cada puntodel conjunto se le asigna su locaclización original, obteniendose asi la misma figura. Este tipo de proyección donde cada punto del conjunto es dejado en su localizacion original es conocida como una **identidad**.

Ejemplo 1 (Plano de reflexión)



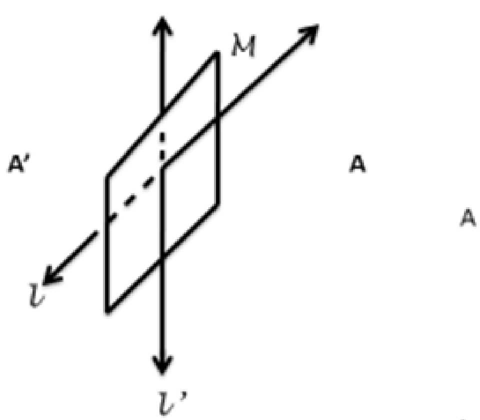
Reflexion del Punto A a traves del plano $\mathcal{M}$

Ejemplo 2: (Reflexión de conjutos de puntos)



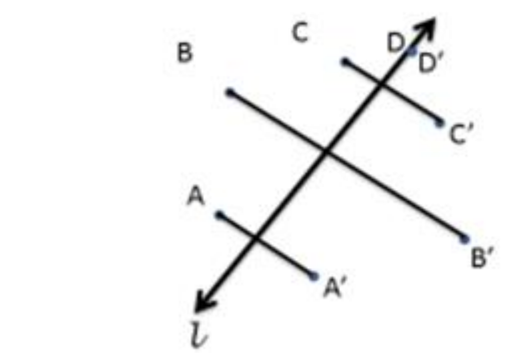
Reflexion de una piramide a traves del plano $\mathcal{M}$

Ejemplo 3: (Reflexión de una recta)



Reflexion de la recta l a traves del plano $\mathcal{M}$

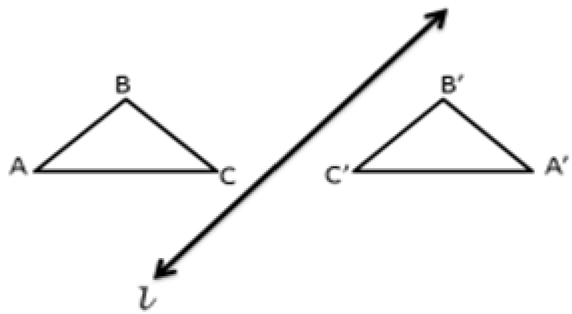
Ejemplo 4: (Recta de reflexión)



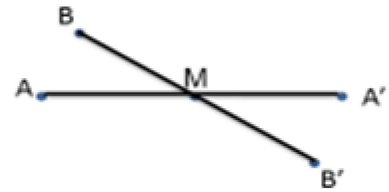
Reflexion de los puntos A,B,C y D a traves de la recta l.

Ejemplo 5: (Reflexión de ΔABC)

Ejemplo 6: (Punto de reflexión)



Reflexion de $\triangle ABC$ a traves de la recta l



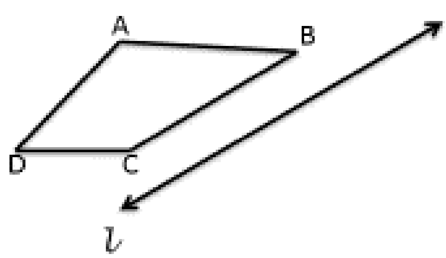
Reflexion de los puntos A y B a traves del Punto M.

Ejercicios de Practica :

1. Si los puntos A′,B′,C′ y D′ son las proyecciones de los puntos A,B,C y D recpectivamente, entonces ,cual es la reflexion de las siguientes figuras?

   a. $\overline{AB}$
   b. $\overrightarrow{AB}$
   c. $\overleftrightarrow{AB}$
   d. $\angle ABC$
   e. $\triangle ABC$
   f. □ABCD

2. Dibuje la reflexion del siguiente cuadrilatero atraves de la recta

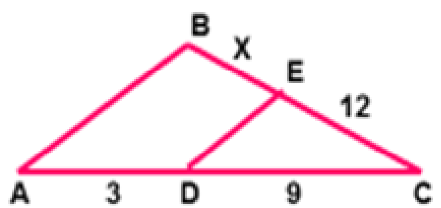


9.G.7.8 Demuestra teoremas sobre triángulos. Incluye los teoremas siguientes: una recta paralela a uno de los lados de un triángulo divide a los otros dos proporcionalmente, y viceversa. Demuestra el teorema de Pitágoras al usar semejanza de triángulos.

Teorema: **Si una recta es paralela a un lado de un triángulo e interseca a los otros dos, entonces los divide proporcionalmente.**

Segmentos proporcionales:

Ejemplo 1:



Entonces:

$\frac{CD}{AD} = \frac{CE}{BE}$

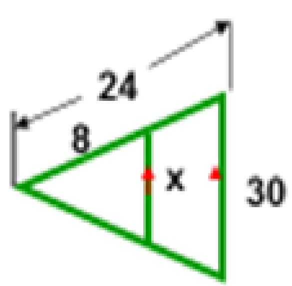
$\frac{9}{3} = \frac{12}{x}$

$9(x) = 12(3)$

$9x = 36$

$x = 4$

Ejemplo 2:



Entonces:

$\frac{24}{8} = \frac{30}{x}$

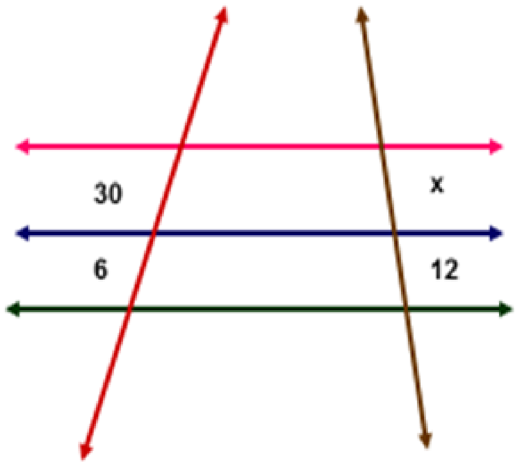
$24(x) = 8(30)$

$24x = 240$

$x = 10$

Teorema: si varias rectas paralelas intersecan a dos rectas tranversales, determina en ellas segmentos proporcionales

Ejemplo:



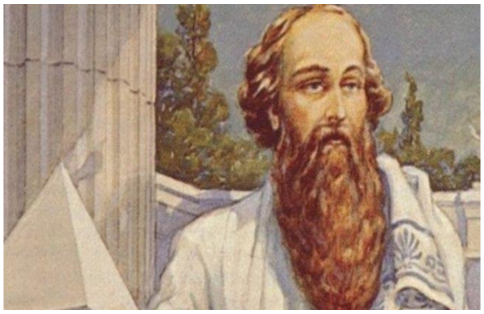
Entonces:

$$\frac{30}{6} = \frac{x}{12}$$

$$6(x) = 12(30)$$

$$6x = 360$$

$$x = 60$$



Lección 8. Teorema de Pitágoras

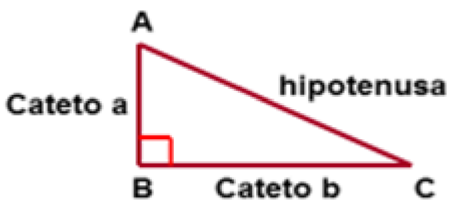
Pitágoras es uno de los personajes más conocidos de la historia. Fue un matemático y filósofo griego, que vivió entre los años 580 a.C y 495 a.C. Hizo grandes aportaciones en numerosos campos como la astronomía y la música y, por supuesto en la filosofía y las matemáticas.

Son muchos los expertos que consideran que Pitágoras fue el **primer matemático** más completo de la historia. De lo que no hay duda es que fue el primero en establecer una relación entre las matemáticas y la música.

Nació en la **Isla de Samos**, aunque durante su infancia vivió en diversos lugares porque su padre era mercader. Tuvo una buena educación y aprendió a tocar la lira. Aprendió de varios maestros influyentes, como Pherekydes o Tales. Fue en Egipto donde Pitágoras se acercó a la **geometría**, lo que le sirvió para formular el conocido Teorema de Pitágoras. En el ámbito de la música, la aportación más importancia que hizo Pitagóras fue la **formulación de las leyes de la armonía**. Además, logró establecer intervalos proporcionales y la relación de disonancia o consonancia, creando así la escala musical.

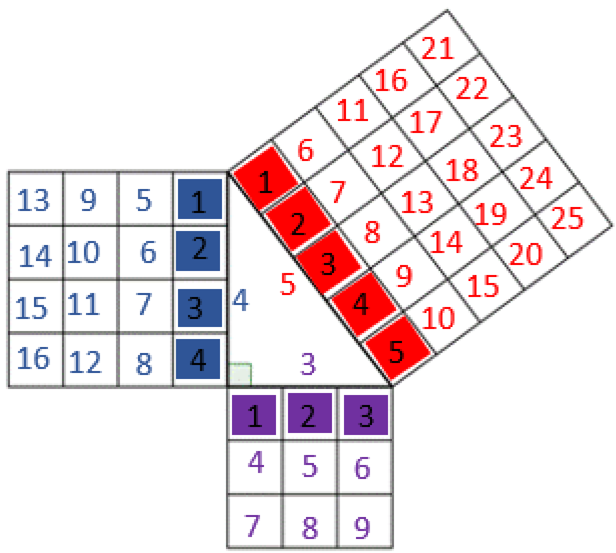
Pitágoras descubrió una propiedad interesante de los **triángulos rectángulos**: la suma de los cuadrados de las longitudes de los **catetos** es igual al cuadrado de la longitud de la **hipotenusa** del triángulo. Los catetos son los lados más cortos del triángulo rectángulo y la hipotenusa es el lado más largo. La hipotenusa siempre está ubicada en el lado opuesto al ángulo recto (90º). A esta propiedad que tiene muchas aplicaciones en la ciencia, el arte, la ingeniería y la arquitectura se le conoce como **Teorema de Pitágoras**.

En un triángulo rectángulo la suma del cuadrado de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.



El teorema de Pitágoras solamente se aplica a triángulos rectángulos. Los triángulos rectángulos son aquellos que tienen un ángulo recto o de 90 grados (90°).

El Teorema de Pitágoras puede también representarse en términos de área. En un triángulo rectángulo, el área del cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados de los catetos. Lo podemos observar en la ilustración para catetos 3 y 4, y una hipotenusa de 5 unidades.



$$5^2 = 3^2 + 4^2$$

$$25 = 9 + 16$$

$$25 = 25$$

Ejemplo 1

$c^2 = 5^2 + 6^2$

$c^2 = 25 + 36$

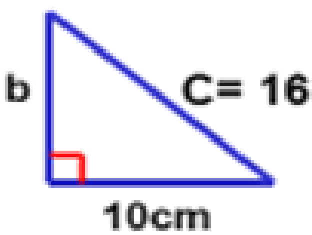
$c^2 = 61$

$\sqrt{c^2} = \sqrt{61}$

$c \cong 7.8$

Ejemplo 2

$16^2 = 10^2 + b^2$



$256 = 100 + b^2$

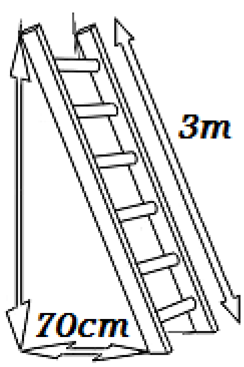
$256 - 100 = b^2$

$\sqrt{156} = \sqrt{b^2}$

$12.5 \cong b$

Ejemplo 3

Calcular la altura que podemos alcanzar con una escalera de 3 metros apoyada sobre la pared si la parte inferior la situamos a 70 centímetros de ésta.



Este ejemplo muestra una aplicación del Teorema de Pitágoras. Tenemos la hipotenusa y un cateto. Por tanto, hay que buscar cuánto mide el otro cateto, el cual representa la altura de la escalera.

$c^2 = a^2 + b^2$ $\qquad c = 3m \quad a = 70cm$

Debemos convertir todos los valores a una sola unidad, a centímetros o a metros. Para esto, debemos realizar una conversión. Hay que recordar que, 1 m = 100 cm.

Convertiremos los metros a centímetros

$$3\cancel{m}\left(\frac{100cm}{1\cancel{m}}\right) = \frac{300cm}{1} = 300cm$$

Entonces, aplicamos la fórmula del Teorema de Pitágoras.

$c^2 = a^2 + b^2$

$300cm = 70cm + \ b^2$

$300cm - 70cm = \ b^2$

$230cm = b^2$

$b^2 = 230cm$

$b = \sqrt{230}$

$b \approx 15.17\ cm$

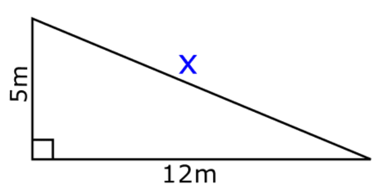
La altura de la escalera es aproximadamente 15.17 cm.

El símbolo ≈ significa “aproximadamente”

El resultado está redondeado a dos lugares decimales.

Ejemplo 4

Encontrar la hipotenusa en el siguiente rectángulo.



$c^2 = a^2 + b^2$ en este caso c esta representada por la variable x

$x^2 = 5^2 + 12^2$

$x^2 = 25 + 144$

$x^2 = 169$

$x = \sqrt{169}$

$x = 13m$

Es importante que no olvidemos de escribir las unidades de medidas (si son parte del problema).

Evaluación 5: 50 puntos

Parte I. Escoge la contestación correcta. 5 pts.

1. Un ángulo recto es

a. un ángulo de 45 grados | c. un ángulo de 180 grados
b. un ángulo de 90 grados | d. un ángulo de 360 grados

2. Para aplicar el teorema de Pitágoras en necesario

a. tener un ángulo obtuso | c. tener un ángulo recto
b. tener un triángulo equilátero | d. tener un triángulo isósceles

3. En un triángulo de lados 1cm y 1 dm, ¿cuánto mide la hipotenusa?

a. $\sqrt{101}$ cm | c. $\sqrt{101}$ dm $1dm = 10cm$
b. $\sqrt{202}$ cm | d. $\sqrt{202}$ dm

4. La hipotenusa es el lado ________ al ________ en _________.

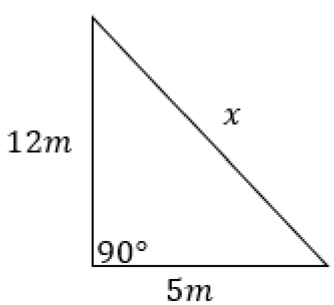
a. adyacente, ángulo de 90 grados, un triángulo rectángulo
b. opuesto, ángulo de 90 grados, cualquier triángulo
c. adyacente, ángulo agudo, un triángulo rectángulo
d. opuesto, ángulo de 9º grados, un triángulo rectángulo.

5. Los lados más cortos en un triángulo rectángulo se nombran _____.

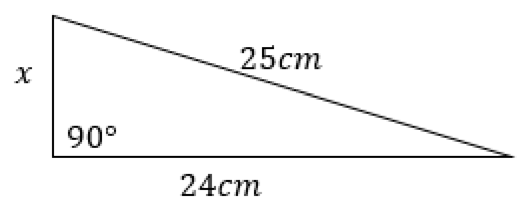
a. catetos | c. lados opuestos
b. lados cortos | d. lados rectos

Parte II. Encontrar la medida de x. 12 pts

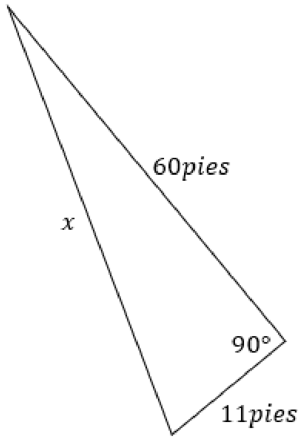
1.



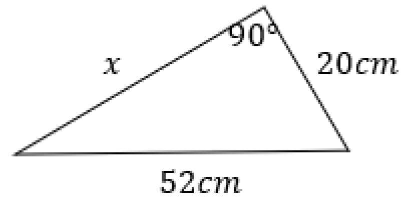
2.



3.

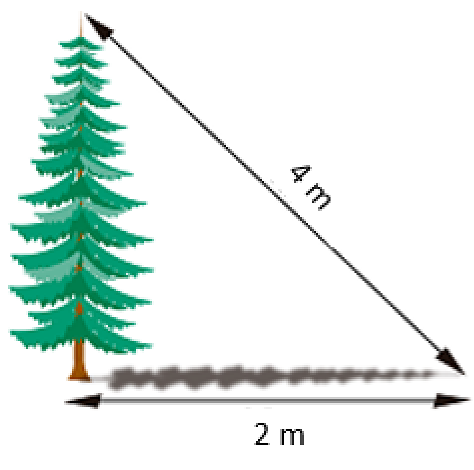


4.

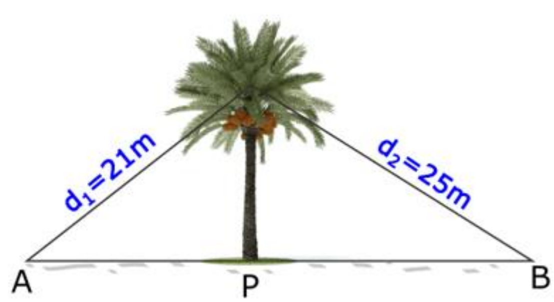


Parte III. Resuelve cada problema. Redondea a dos lugares decimales. 33 pts.

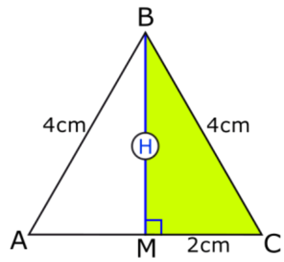
1. Al atardecer, un árbol proyecta una sombra de 2 metros de longitud. Si la distancia desde la parte más alta del árbol al extremo más alejado de la sombra es de 4 metros, ¿cuál es la altura del árbol? 6 pts.



2. Una palmera de 17 metros de altura se encuentra sujeta por dos cables de 21m y 25m respectivamente. En la figura se pide calcular la distancia AB. 6 pts.

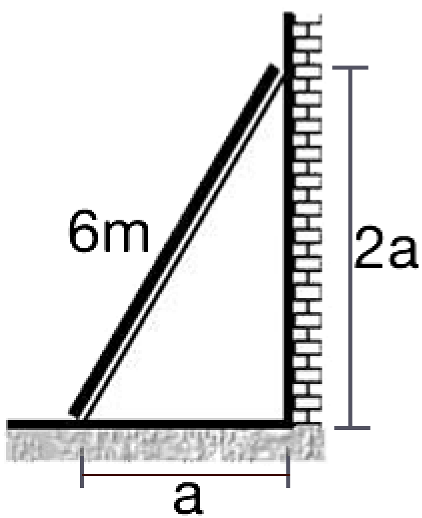


3. Calcular la altura del siguiente triángulo equilátero. 6 pts.



4. Desde la parte más alta de un faro de 50m de altura se observa un bote a una distancia de 130m. Determinar la distancia desde el pie del faro hasta el bote. Dibujar la situación, luego resolver. 6 pts.

5. Determinar el perímetro del triángulo rectángulo que forma la escalera con la pared en la que está apoyada. Necesitarás encontrar el valor de a primero. 9 pts.



Actividades y Tareas de desempeño de la Unidad

(Se recomienda que cada maestro asigne la puntuación que entienda adecuada utilizando una rúbrica)

Reglas de Ángulos

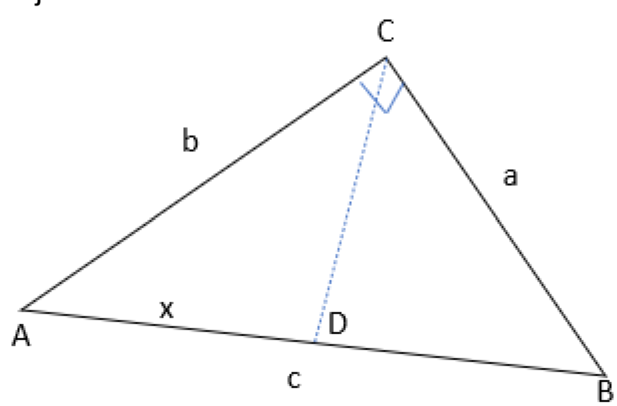
En esta tarea los estudiantes prueban los teoremas ALA, LAL y LLL (Ver en la parte inferior).

Problema de la sombra

Los estudiantes estimarán la altura de un poste de luz afuera usando las sombras. Aplicarán lo que saben sobre los triángulos semejantes y el factor escalar que estudiaron en clase.

La solución de Alejandro

- Alejandro ha comenzado a probar el Teorema de Pitágoras utilizando triángulos semejantes.



Triángulo ABC es semejante al triángulo ACD y CBD

AD = x

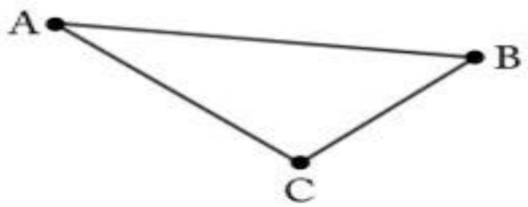
DB = c - x

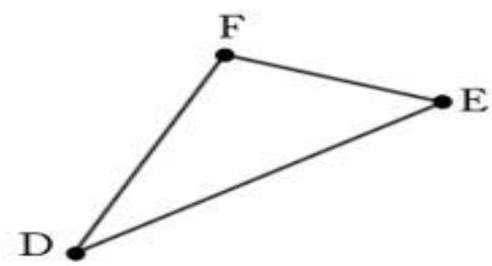
$$\frac{x}{b} = \frac{b}{c}$$

1. Explica por qué los tres triángulos son semejantes.
2. Trata de completar el modelo de Alejandro. (Usa papel para graficar si necesitas).

Reglas de ángulos

- ¿Por qué LAL funciona?
- En los dos triángulos a continuación, el ángulo A es congruente al ángulo D; el lado AC es congruente al lado DF y el lado AB es congruente al lado DE:





Sally razona de la siguiente manera: “si el ángulo *A* es congruente al ángulo *D*, entonces puedo mover el punto *A* al punto *D*, de manera que el lado *AB* recae encima del lado *DE* y el lado *AC* recae encima del lado *DF*. Ya que *AB* y *DE* son congruentes, así como lo son *AC* y *DF*; los dos triángulos corresponden exactamente así que son congruentes”.

Explica el razonamiento de Sally de por qué el triángulo *ABC* es congruente al triangulo *DEF* utilizando el lenguaje de reflexiones:

1. Construir una reflexión donde trace el punto *A* al punto D. Llama *B′* y *C′* las imágenes de *B* y *C* respectivamente bajo esta reflexión.
2. Construir una reflexión donde no se mueva D, pero que envíe *B′* a *E*. Llamar *C″* la imagen de *C′* bajo esta reflexión.
3. Construir una reflexión donde no se mueva D o E pero que envíe *C″* a *F*

REFERENCIAS

Ron Larson, Laurie Boswell 2015, Big Idea Math 1762 Norcross Road Erie, PA USA.

Clemens, O'Daffer, Cooney 1998, Geometry No. 25 2nd floor, Naucalpan De Juares Edo. De Mexico.

Mapas Curriculares 2014, Departamento de Educación

https://www.matesfacil.com/pitagoras/problemas-resueltos-pitagoras.html

https://teoremapitagoras.com/ejercicios/teorema-de-pitagoras-ejercicios

http://www.ck12.org/geometry

http://www.dynamicgeometry.com/

http://www.illustrativemathematics.org

http://plus.maths.org/content/os/issue7/features/proof1/index

http://education.ti.com

https://es.khanacademy.org/math/basic-geo/basic-geometry-shapes/triangle-angles/e/triangle_angles_1

https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/geometria/basica/ejercicios-interactivos-de-triangulos.html

https://www.spanishged365.com/triangulos-congruentes/

https://www.ck12.org/section/uso-de-tri%c3%a1ngulos-congruentes-%3a%3aof%3a%3a-tri%c3%a1ngulos-congruentes/

https://www.slideshare.net/marceloandrescalderonbarria/26-ejercicios-congruencia-de-tringulos

https://www.slideshare.net/JRIOSCABRERA/ejercicios-de-geometra-10340004

Estimada familia:

El Departamento de Educación de Puerto Rico (DEPR) tiene como prioridad el garantizar que a sus hijos se les provea una educación pública, gratuita y apropiada. Para lograr este cometido, es imperativo tener presente que los seres humanos son diversos. Por eso, al educar es necesario reconocer las habilidades de cada individuo y buscar estrategias para minimizar todas aquellas barreras que pudieran limitar el acceso a su educación.

La otorgación de acomodos razonables es una de las estrategias que se utilizan para minimizar las necesidades que pudiera presentar un estudiante. Estos permiten adaptar la forma en que se presenta el material, la forma en que el estudiante responde, la adaptación del ambiente y lugar de estudio y el tiempo e itinerario que se utiliza. Su función principal es proveerle al estudiante acceso equitativo durante la enseñanza y la evaluación. Estos tienen la intención de reducir los efectos de la discapacidad, excepcionalidad o limitación del idioma y no, de reducir las expectativas para el aprendizaje. Durante el proceso de enseñanza y aprendizaje, se debe tener altas expectativas con nuestros niños y jóvenes.

Esta guía tiene el objetivo de apoyar a las familias en la selección y administración de los acomodos razonables durante el proceso de enseñanza y evaluación para los estudiantes que utilizarán este módulo didáctico. Los acomodos razonables le permiten a su hijo realizar la tarea y la evaluación, no de una forma más fácil, sino de una forma que sea posible de realizar, según las capacidades que muestre. El ofrecimiento de acomodos razonables está atado a la forma en que su hijo aprende. Los estudios en neurociencia establecen que los seres humanos aprenden de forma visual, de forma auditiva o de forma kinestésica o multisensorial, y aunque puede inclinarse por algún estilo, la mayoría utilizan los tres.

Por ello, a continuación, se presentan algunos ejemplos de acomodos razonables que podrían utilizar con su hijo mientras trabaja este módulo didáctico en el hogar. Es importante que como madre, padre o persona encargada en dirigir al estudiante en esta tarea los tenga presente y pueda documentar cuales se utilizaron. Si necesita más información, puede hacer referencia a la ***Guía para la provisión de acomodos razonables*** (2018) disponible por medio de la página www.de.pr.gov, en educación especial, bajo Manuales y Reglamentos.

GUÍA DE ACOMODOS RAZONABLES PARA LOS ESTUDIANTES QUE TRABAJARÁN BAJO MÓDULOS DIDÁCTICOS

Acomodos de presentación	Acomodos en la forma de responder	Acomodos de ambiente y lugar	Acomodos de tiempo e itinerario
Cambian la manera en que se presenta la información al estudiante. Esto le permite tener acceso a la información de diferentes maneras. El material puede ser presentado de forma auditiva, táctil, visual o multisensorial.	Cambian la manera en que el estudiante responde o demuestra su conocimiento. Permite a los estudiantes presentar las contestaciones de las tareas de diferentes maneras. Por ejemplo, de forma verbal, por medio de manipulativos, entre otros.	Cambia el lugar, el entorno o el ambiente donde el estudiante completará el módulo didáctico. Los acomodos de ambiente y lugar requieren de organizar el espacio donde el estudiante trabajará.	Cambian la cantidad de tiempo permitido para completar una evaluación o asignación; cambia la manera, orden u hora en que se organiza el tiempo, las materias o las tareas.
Aprendiz visual: ▪ Usar letra agrandada o equipos para agrandar como lupas, televisores y computadoras ▪ Uso de láminas, videos pictogramas. ▪ Utilizar claves visuales tales como uso de colores en las instrucciones, resaltadores (highlighters), subrayar palabras importantes. ▪ Demostrar lo que se espera que realice el estudiante y utilizar modelos o demostraciones. ▪ Hablar con claridad, pausado ▪ Identificar compañeros que puedan servir de apoyo para el estudiante ▪ Añadir al material información complementaria **Aprendiz auditivo**:	**Aprendiz visual:** ▪ Utilizar la computadora para que pueda escribir. ▪ Utilizar organizadores gráficos. ▪ Hacer dibujos que expliquen su contestación. ▪ Permitir el uso de láminas o dibujos para explicar sus contestaciones ▪ Permitir que el estudiante escriba lo que aprendió por medio de tarjetas, franjas, láminas, la computadora o un comunicador visual. ▪ Contestar en el folleto. **Aprendiz auditivo**: ▪ Grabar sus contestaciones ▪ Ofrecer sus contestaciones a un adulto que documentará por escrito lo mencionado.	**Aprendiz visual:** ▪ Ambiente silencioso, estructurado, sin muchos distractores. ▪ Lugar ventilado, con buena iluminación. ▪ Utilizar escritorio o mesa cerca del adulto para que lo dirija. **Aprendiz auditivo**: ▪ Ambiente donde pueda leer en voz alta o donde pueda escuchar el material sin interrumpir a otras personas. ▪ Lugar ventilado, con buena iluminación y donde se les permita el movimiento mientras repite en voz alta el material. **Aprendiz multisensorial:**	**Aprendiz visual y auditivo:** ▪ Preparar una agenda detalladas y con códigos de colores con lo que tienen que realizar. ▪ Reforzar el que termine las tareas asignadas en la agenda. ▪ Utilizar agendas de papel donde pueda marcar, escribir, colorear. ▪ Utilizar “post-it” para organizar su día. ▪ Comenzar con las clases más complejas y luego moverse a las sencillas. ▪ Brindar tiempo extendido para completar sus tareas. **Aprendiz multisensorial:** ▪ Asistir al estudiante a organizar su trabajo con

Acomodos de presentación	Acomodos en la forma de responder	Acomodos de ambiente y lugar	Acomodos de tiempo e itinerario
▪ Leerle el material o utilizar aplicaciones que convierten el texto en formato audible. ▪ Leer en voz alta las instrucciones. ▪ Permitir que el estudiante se grabe mientras lee el material. ▪ Audiolibros ▪ Repetición de instrucciones ▪ Pedirle al estudiante que explique en sus propias palabras lo que tiene que hacer ▪ Utilizar el material grabado ▪ Identificar compañeros que puedan servir de apoyo para el estudiante **Aprendiz multisensorial:** ▪ Presentar el material segmentado (en pedazos) ▪ Dividir la tarea en partes cortas ▪ Utilizar manipulativos ▪ Utilizar canciones ▪ Utilizar videos ▪ Presentar el material de forma activa, con materiales comunes. ▪ Permitirle al estudiante investigar sobre el tema que se trabajará ▪ Identificar compañeros que puedan servir de apoyo para el estudiante	▪ Hacer presentaciones orales. ▪ Hacer videos explicativos. ▪ Hacer exposiciones **Aprendiz multisensorial:** ▪ Señalar la contestación a una computadora o a una persona. ▪ Utilizar manipulativos para representar su contestación. ▪ Hacer presentaciones orales y escritas. ▪ Hacer dramas donde represente lo aprendido. ▪ Crear videos, canciones, carteles, infografías para explicar el material. ▪ Utilizar un comunicador electrónico o manual.	▪ Ambiente se le permita moverse, hablar, escuchar música mientras trabaja, cantar. ▪ Permitir que realice las actividades en diferentes escenarios controlados por el adulto. Ejemplo el piso, la mesa del comedor y luego, un escritorio.	agendas escritas o electrónicas. ▪ Establecer mecanismos para recordatorios que le sean efectivos. ▪ Utilizar las recompensas al terminar sus tareas asignadas en el tiempo establecido. ▪ Establecer horarios flexibles para completar las tareas. ▪ Proveer recesos entre tareas. ▪ Tener flexibilidad en cuando al mejor horario para completar las tareas. ▪ Comenzar con las tareas más fáciles y luego, pasar a las más complejas. ▪ Brindar tiempo extendido para completar sus tareas.

HOJA DE DOCUMENTAR LOS ACOMODOS RAZONABLES UTILIZADOS AL TRABAJAR EL MÓDULO DIDÁCTICO

Nombre del estudiante: ______________________ **Número de SIE:________**
Materia del módulo: __________________________ **Grado:_______________**

Estimada familia:

1. Utiliza la siguiente hoja para documentar los acomodos razonables que utiliza con tu hijo en el proceso de apoyo y seguimiento al estudio de este módulo. Favor de colocar una marca de cotejo [✓] en aquellos acomodos razonables que utilizó con su hijo para completar el módulo didáctico. Puede marcar todos los que aplique y añadir adicionales en la parte asignada para ello.

Acomodos de presentación	Acomodos de tiempo e itinerario
Aprendiz visual: ☐ Usar letra agrandada o equipos para agrandar como lupas, televisores y computadoras ☐ Uso de láminas, videos pictogramas. ☐ Utilizar claves visuales tales como uso de colores en las instrucciones, resaltadores (*highlighters*), subrayar palabras importantes. ☐ Demostrar lo que se espera que realice el estudiante y utilizar modelos o demostraciones. ☐ Hablar con claridad, pausado ☐ Identificar compañeros que puedan servir de apoyo para el estudiante ☐ Añadir al material información complementaria **Aprendiz auditivo**: ☐ Leerle el material o utilizar aplicaciones que convierten el texto en formato audible. ☐ Leer en voz alta las instrucciones. ☐ Permitir que el estudiante se grabe mientras lee el material. ☐ Audiolibros ☐ Repetición de instrucciones ☐ Pedirle al estudiante que explique en sus propias palabras lo que tiene que hacer ☐ Utilizar el material grabado ☐ Identificar compañeros que puedan servir de apoyo para el estudiante **Aprendiz multisensorial:** ☐ Presentar el material segmentado (en pedazos) ☐ Dividir la tarea en partes cortas ☐ Utilizar manipulativos	**Aprendiz visual:** ☐ Utilizar la computadora para que pueda escribir. ☐ Utilizar organizadores gráficos. ☐ Hacer dibujos que expliquen su contestación. ☐ Permitir el uso de láminas o dibujos para explicar sus contestaciones ☐ Permitir que el estudiante escriba lo que aprendió por medio de tarjetas, franjas, láminas, la computadora o un comunicador visual. ☐ Contestar en el folleto. **Aprendiz auditivo**: ☐ Grabar sus contestaciones ☐ Ofrecer sus contestaciones a un adulto que documentará por escrito lo mencionado. ☐ Hacer presentaciones orales. ☐ Hacer videos explicativos. ☐ Hacer exposiciones **Aprendiz multisensorial:** ☐ Señalar la contestación a una computadora o a una persona. ☐ Utilizar manipulativos para representar su contestación. ☐ Hacer presentaciones orales y escritas. ☐ Hacer dramas donde represente lo aprendido. ☐ Crear videos, canciones, carteles, infografías para explicar el material. ☐ Utilizar un comunicador electrónico o manual.

Acomodos de presentación	Acomodos de tiempo e itinerario
☐ Utilizar canciones ☐ Utilizar videos ☐ Presentar el material de forma activa, con materiales comunes. ☐ Permitirle al estudiante investigar sobre el tema que se trabajará ☐ Identificar compañeros que puedan servir de apoyo para el estudiante	
Acomodos de respuesta	**Acomodos de ambiente y lugar**
Aprendiz visual: ☐ Ambiente silencioso, estructurado, sin muchos distractores. ☐ Lugar ventilado, con buena iluminación. ☐ Utilizar escritorio o mesa cerca del adulto para que lo dirija. **Aprendiz auditivo**: ☐ Ambiente donde pueda leer en voz alta o donde pueda escuchar el material sin interrumpir a otras personas. ☐ Lugar ventilado, con buena iluminación y donde se les permita el movimiento mientras repite en voz alta el material. **Aprendiz multisensorial:** ☐ Ambiente se le permita moverse, hablar, escuchar música mientras trabaja, cantar. ☐ Permitir que realice las actividades en diferentes escenarios controlados por el adulto. Ejemplo el piso, la mesa del comedor y luego, un escritorio.	**Aprendiz visual y auditivo:** ☐ Preparar una agenda detalladas y con códigos de colores con lo que tienen que realizar. ☐ Reforzar el que termine las tareas asignadas en la agenda. ☐ Utilizar agendas de papel donde pueda marcar, escribir, colorear. ☐ Utilizar “post-it” para organizar su día. ☐ Comenzar con las clases más complejas y luego moverse a las sencillas. ☐ Brindar tiempo extendido para completar sus tareas. **Aprendiz multisensorial:** ☐ Asistir al estudiante a organizar su trabajo con agendas escritas o electrónicas. ☐ Establecer mecanismos para recordatorios que le sean efectivos. ☐ Utilizar las recompensas al terminar sus tareas asignadas en el tiempo establecido. ☐ Establecer horarios flexibles para completar las tareas. ☐ Proveer recesos entre tareas. ☐ Tener flexibilidad en cuando al mejor horario para completar las tareas. ☐ Comenzar con las tareas más fáciles y luego, pasar a las más complejas. ☐ Brindar tiempo extendido para completar sus tareas.

Otros:

____
____
____
____
____
____
____
____

2. Si tu hijo es un candidato o un participante de los servicios para estudiantes aprendices del español como segundo idioma e inmigrantes considera las siguientes sugerencias de enseñanza:

- Proporcionar un modelo o demostraciones de respuestas escritas u orales requeridas o esperadas.
- Comprobar si hay comprensión: use preguntas que requieran respuestas de una sola palabra, apoyos y gestos.
- Hablar con claridad, de manera pausada.
- Evitar el uso de las expresiones coloquiales, complejas.
- Asegurar que los estudiantes tengan todos los materiales necesarios.
- Leer las instrucciones oralmente.
- Corroborar que los estudiantes entiendan las instrucciones.
- Incorporar visuales: gestos, accesorios, gráficos organizadores y tablas.
- Sentarse cerca o junto al estudiante durante el tiempo de estudio.
- Seguir rutinas predecibles para crear un ambiente de seguridad y estabilidad para el aprendizaje.
- Permitir el aprendizaje por descubrimiento, pero estar disponible para ofrecer instrucciones directas sobre cómo completar una tarea.
- Utilizar los organizadores gráficos para la relación de ideas, conceptos y textos.
- Permitir el uso del diccionario regular o ilustrado.
- Crear un glosario pictórico.
- Simplificar las instrucciones.
- Ofrecer apoyo en la realización de trabajos de investigación.
- Ofrecer los pasos a seguir en el desarrollo de párrafos y ensayos.
- Proveer libros o lecturas con conceptos similares, pero en un nivel más sencillo.
- Proveer un lector.
- Proveer ejemplos.
- Agrupar problemas similares (todas las sumas juntas), utilizar dibujos, láminas, o gráficas para apoyar la explicación de los conceptos, reducir la complejidad lingüística del problema, leer y explicar el problema o teoría verbalmente o descomponerlo en pasos cortos.
- Proveer objetos para el aprendizaje (concretizar el vocabulario o conceptos).
- Reducir la longitud y permitir más tiempo para las tareas escritas.
- Leer al estudiante los textos que tiene dificultad para entender.
- Aceptar todos los intentos de producción de voz sin corrección de errores.
- Permitir que los estudiantes sustituyan dibujos, imágenes o diagramas, gráficos, gráficos para una asignación escrita.
- Esbozar el material de lectura para el estudiante en su nivel de lectura, enfatizando las ideas principales.
- Reducir el número de problemas en una página.
- Proporcionar objetos manipulativos para que el estudiante utilice cuando resuelva problemas de matemáticas.

3. Si tu hijo es un estudiante dotado, es decir, que obtuvo 130 o más de cociente intelectual (CI) en una prueba psicométrica, su educación debe ser dirigida y desafiante. Deberán considerar las siguientes recomendaciones:

- Conocer las capacidades especiales del estudiante, sus intereses y estilos de aprendizaje.
- Realizar actividades motivadoras que les exijan pensar a niveles más sofisticados y explorar nuevos temas.
- Adaptar el currículo y profundizar.
- Evitar las repeticiones y las rutinas.
- Realizar tareas de escritura para desarrollar empatía y sensibilidad.
- Utilizar la investigación como estrategia de enseñanza.
- Promover la producción de ideas creativas.
- Permitirle que aprenda a su ritmo.
- Proveer mayor tiempo para completar las tareas, cuando lo requiera.
- Cuidar la alineación entre su educación y sus necesidades académicas y socioemocionales.